REPETITION

(1) Låt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då är

$$F(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

där $f_1(x_1, ..., x_n) = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n, ...,$
$f_m(x_1, ..., x_n) = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n$.
Talen a_{ij} definierar en matris

$$[F] = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ & ... & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

Sådan att $[F(v)] = [F][v]$.

Låt $e_1 = (1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$ vara den standard basen till $\mathbb{R}^n$. Kolumnerna av matrisen $[F]$ motsvara vektorer $F(e_i)$.

$$[F] = [F(e_1)|F(e_2)|...|F(e_n)]$$

Så harvi att:

$$F(\vec{x}) = [F(e_1)|F(e_2)|...|F(e_n)] \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

F kallas en injektiv avbildning om F ordnar två olika element $F(a) \neq F(b)$ i B till två olika element $a \neq b$ i A.

Så är F **injektiv (one-to-one)** om den följande gäller:

$$F(a) = F(b) \Rightarrow a = b$$

F kalls **inverterbar** om det finns en invers avbildning, d.v.s en avbildning $F^{-1} : B \to A$ sådan att $F \circ F^{-1} = id_B$ och $F^{-1} \circ F = id_A$.

Om $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning (Obs samma dimension) då gäller att:

$$\boxed{F \text{ är injektiv} \Leftrightarrow F \text{ är inverterbar} \Leftrightarrow R(F) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow [F] \text{ är inverterbar}}$$

(2) Ett (reellt) **vektorrum** består av en mängd V med två operationer:

$$+ : V \times V \to V \quad \text{som ordnar } (v_1, v_2) \to v_1 + v_2 \in V$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V \quad \text{som ordnar } (k, v_2) \to kv_2 \in V$$

such that:
(a) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.
(b) $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$.
(c) det finns ett element (nollvektor) $\vec{0} \in V$ sådan att $\vec{0} + u = u$ for alla $u \in V$.
(d) varje element v har ett inverselement, dvs det finns $-v \in V$ sådan att $v + (-v) = \vec{0}$.
(e) $k(u + v) = ku + kv$.
(f) $(k_1 + k_2)u = k_1u + k_2u$.
(g) $k_1(k_2u) = (k_1k_2)u$.
(h) $1u = u$.

$W \subseteq V$ är ett **delrum** om operationen kan definieras på W, dvs om de följande gäller:
(a) För varje $w_1, w_2 \in W$ är $w_1 + w_2 \in W$.
(b) För varje $w \in W$ och $k \in \mathbb{R}$ är $kw \in W$.

$Span(v_1, ..., v_r)$ består av alla linjära kombinationer av $v_1, ..., v_r$:

$$Span(v_1, ..., v_r) = \{v = k_1v_1 + ... + k_rv_r \text{ där } k_i \in \mathbb{R}\}.$$

Detta är ett DELRUM!

Vi säger att $v_1, ..., v_r$ är **linjärt oberoende (L.I.)** om bara noll koefficienter ger den noll vektorn, d.v.s om den följande gäller:

$$k_1v_1 + ... + k_rv_r = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = ... = k_r = 0.$$

Man ser att:

$v_1, ..., v_r$ är **linjärt beroende**	$\Leftrightarrow$	det finns en v_i som kan skrivas som en linjär kombination av dem andra
$v_1, ..., v_r$ är **linjärt oberoende**	$\Leftrightarrow$	ingen v_i som kan skrivas som en linjär kombination av dem andra

$(v_1, ..., v_r)$ är en **bas till** V om de är **linjärt oberoende** och $Span(v_1, ..., v_n) = V$.

- $(e_1, ..., e_n)$ kallas den standard basen till $\mathbb{R}^n$.
- $(1, x, x^2, ..., x^k)$ kallas den standard basen till P_k.
- Låt $A_{lk} = (a_{ij})$ där

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad (i,j) = (lk) \\ 0 & \text{om} \quad (i,j) \neq (lk) \end{cases}$$

$\{A_{lm}, 1 \leq l \leq n, 1 \leq k \leq m\}$ kallas den standard basen till $M_{n,m}\mathbb{R}$.

Om $B = (v_1, ..., v_r)$ är en **bas** till V då kan alla vektorer $v \in V$ skrivas son en linjär kombination $v = k_1v_1 + ... + k_rv_r$ p ett unikt sätt. Så är

$$(\vec{v})_B = (k_1, ..., k_r)$$

en unik vektor som man associerar till v. Den kallas koordinatsvektor och $k_1, ..., k_r$ are koordinaterna av v med avseende till basen $(v_1, ..., v_k)$.

Om W är ett delrum av V då kan man brja från en bas till W och bygga en bas till V. P likande sätt ser man att

En bas till W är en del av en bas till V

Vi säger att V är **ändligt-dimensionellt** if V har en bas $(v_1, ..., v_r)$. Annars säger vi att V är oändligt-dimensionellt.

Ett ändligt-dimensionellt vektor rum får ha olika baser, men alla ska ha samma antalet vektorer. Så Om $(v_1, ..., v_r)$, $(w_1, ..., w_s)$ är två olika baser tll V, då är $r = s$.

Dimensionen av ett ändligt-dimensionellt vektor rum är lika med antalet vektorer i en bas.

- $\dim(\{0\} = 0$ by convention!
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- $\dim(P_k) = k + 1$.
- $\dim(M_{n,m}(\mathbb{R})) = nm$.

(3) Låt $(V, <,>)$ vara ett vektorrum med en inre-produkt.

$(\vec{v_1}, ..., \vec{v_r})$ är en **ON-bas** om
(a) $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_r})$ är linjärt oberoende och
(b) $Span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_r}) = V$ och
(c) $< \vec{v_i}, \vec{v_j} >= 0$ för alla $i \neq j$ (ortogonala) och
(d) $\| \vec{v_i} \| = 1 (normala)$.

Man hittar en ON-bas genom att anvnda **Gram-Schmidt Process** :
Börja med en bas $(\vec{u_1}, ..., \vec{u_r})$, sedan hittar man en ortogonal bas $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_r})$
:

- $\vec{v_1} = \vec{u_1}$
- $\vec{v_2} = \vec{u_2} - \frac{<\vec{u_2}, \vec{v_1}>}{\|\vec{v_1}\|^2} \vec{v_1}$
- $\vec{v_3} = \vec{u_3} - \frac{<\vec{u_3}, \vec{v_1}>}{\|\vec{v_1}\|^2} \vec{v_1} - \frac{<\vec{u_3}, \vec{v_2}>}{\|\vec{v_2}\|^2} \vec{v_2}$

  ....
- $\vec{v_r} = \vec{u_r} - \frac{<\vec{u_r}, \vec{v_1}>}{\|\vec{v_1}\|^2 l} \vec{v_1} - \frac{<\vec{u_r}, \vec{v_2}>}{\|\vec{v_2}\|^2} \vec{v_2} - ... - \frac{<\vec{u_r}, \vec{v_{r-1}}>}{\|\vec{v_{r-1}}\|^2} \vec{v_{r-1}}$.

Sedan får man en ON-bas:

$$\text{ON-bas: } \left(\frac{\vec{v_1}}{\| \vec{v_1} \|}, ..., \frac{\vec{v_r}}{\| \vec{v_1} \|}\right).$$

En ON-bas användar man för att hitta $proj_W(\vec{v})$.
Låt W vara ett delrum av V, och $v \in V$. W är änligt dimensionellt så kan man hitta en ON-bas $(\vec{w_1}, ..., \vec{w_r})$. Då är:

$$\boxed{proj_W(\vec{v}) =< \vec{v}, \vec{w_1} > \vec{w_1} + ...+ < \vec{v}, \vec{w_r} > \vec{w_r} \in W}$$

Notera att varje $v \in V$ kan skrivas på ett entydig dtt som

$$\boxed{v = proj_W(\vec{v}) + \vec{v}^{\perp}}$$

där $proj_W(\vec{v}) \in W$ och $\vec{v}^{\perp} \in W^{\perp}$.

(4) Om T är en linjär avbildning då:
- $T(\vec{0}) = \vec{0}$.
- $T(-\vec{v}) = -T(\vec{v})$.
- $T(\vec{u} - \vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v})$.
- Låt $B = (\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ vara en bas och $(\vec{v})_B = (k_1, ..., k_n)$, då är:

$$T(\vec{v}) = k_1 T(\vec{v_1}) + ... + T(\vec{v_n}).$$

Låt $T_1 : V \to W$ och $T_2 : W \to Z$. vara två linjära avbildningar. **Sammansättningen** definieras som:

$$T_2 \circ T_1 : V \to Z, \;\; T_2 \circ T_1(\vec{v}) = T_2(T_1(\vec{v}))$$

för alla $\vec{v} \in V$.

Avbildningen $T_2 \circ T_1$ är också linjär.

$\boxed{\textbf{Ker(T)} = \{\vec{v} \in V \text{ med } T(\vec{v}) = \vec{0}\} \subseteq V.}$

$\boxed{\textbf{R}(\textbf{T}) = \{\vec{w} \in W \text{ med } T(\vec{v}) = \vec{w} \text{ för någon } \vec{v} \in V\} \subseteq W.}$

De är båda delrum.

$\boxed{\textbf{rk}(\textbf{T}) = \dim(R(T)).}$

$\boxed{\textbf{nullity}(\textbf{T}) = \dim(Ker(T)).}$

Om $V = \mathbb{R}^n$ och $W = \mathbb{R}^m$ då är $[T] \in M_{m,n}\mathbb{R}$ och:
- $rk(T) = \dim(R(T)) = \dim(Col(T)) = rk([T])$.
- $nullity(T) = \dim(Ker(T)) = \dim(N([T])) = nullity([T])$.

Om $\dim(V) = n$. Då gäller att:

$\boxed{n = rk(T) + nullity(T).}$

(5) Låt $\dim(V) = n, \dim(W) = m$. Kom ihåg att eftersom fixade vi en bas i V och en bas i W då har vi två linjära avbidningar:

$$()_B : V \to \mathbb{R}^n, ()_{B'} : W \to \mathbb{R}^m.$$

De är båda injektiva och då är de inverterbara.

Matrisen associerad till T är:

$$\boxed{[T]_{B'B} = \begin{pmatrix} T(v_1)_{B'} | & ... & |T(v_n)_{B'} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})}$$

där $B = (v_1, ..., v_n)$. Så har man att:

$$\begin{tikzcd} \vec{v} \arrow[r, "T"] \arrow[d] & T(\vec{v}) \\ (\vec{v})_B \arrow[r, "{[T]_{B'B}}"] & (T(\vec{v})_{B'} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Om $V = W$ då kan man ta $B' = B$ och då gäller att:

$$T(v)_B = \begin{pmatrix} T(v_1)_B | & ... & |T(v_n)_B \end{pmatrix} (v)_B$$

Notera att om $T_1 : V \to W, T_2 : W \to Z$ och B, B', B'' är baser till respektive V, W, Z, då är

$$[T_2 \circ T_1]_{B''B} = [T_2]_{B''B'}[T_1]_{B'B}.$$

Man ser att:

$$\begin{array}{ccc} T : V \to W & \Leftrightarrow & [T]_B \text{ är inverterbar.} \\ \text{är injektiv} & & \end{array}$$

Om detta gäller då är

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}.$$