Matematiska Institutionen
KTH

Exam for the course Linjär algebra, 5B1307 , Januari 14, 2008, 14:00-19:00.

Kursexaminator: Sandra Di Rocco Minst 15 poäng ger betyg 3, minst 22 poäng ger betyg 4 och mins 28 poäng ger betyg 5.

PROBLEM:

PART I

1. (3p) (3 p.)Bestäm samtliga lösningar till systemet

$$\begin{cases} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 9 \\ x & + & 3y & + & 5z & = & 12 \end{cases}$$

   Lösning: Determinanten av den koefficient-matris, är lika med noll. Då har systemet oändliga många lösningar beroende på minst ett parameter. Matrisen associerad till systemet är: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 12 \end{pmatrix}$.

   Gauss-Jordan elemination ger:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Då kan vi sätta $z = t$ och $y = 5 - 3t, x = 2 + t - 5 + 3t = 4t - 3$. Lösningar till systemet är $(x, y, z) = (4t - 3, 5 - 3t, t)$ för varje $t \in \mathrm{R}^n$.

2. (3p) Beräkna arean av den triangeln i $\mathbf{R}^2$ som har hörn i punkterna $(1, 1), (3, 2), (-1, 4)$. (ON system).
   Låt $A = (1, 1), B = (3, 2), C = (-1, 4)$. Punkterna kan tänkas som vektorer i $\mathbf{R}^3$, genom att sätta sista koordinaten lika med noll. Då är

$$Area = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = 4.$$

3. (3p)(P_2 betecknar vektor-rummet av alla polynom av grad ≤ 2). Visa att

$$Span(1, 1 + x, x + x^2) = P_2.$$

   Eftersom $\dim(P_2) = 3$, kan man visa bara att de är linjärt oberoende.

$$a \cdot 1 + b(1 + x) + c(x + x^2) = (a + b) + (b + c)x + cx^2 = 0$$

   ger $a + b = b + c = c = 0$, som betyder att $a = b = c = 0$. Detta visar att de är linjärt oberoende och att de utgör en bas.

4. (3p) Betrackta matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Undersök om det finns en diagonalmatris D och en ortogonalmatris Q sådan att $A = QAQ^T$. Bestäm i så fall D och Q.

Eftersom matrisen A är symmetrisk, så är A ortogonalt diagonaliserbar. Detta betyder att det finns en diagonalmatris D och en ortogonalmatris Q sådan att $A = QDQ^T$.

Egenvärden till matrisen A, som är lösningar till $det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, är $\lambda = 5$ och $\lambda = -1$. Egenrummen E_1 och E_3, har dimension 1 och $E_5 = Span(1,1), E_{-1} = Span(1,-1)$. Efter man normerar dem får man en ON bas, och basbytematrisen är:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Diagonalmatrisen D är:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. (3p) Låt $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjär avbildning med matris :

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (med avseende till standardbasen)}$$

Bestäm om F är inverterbar och i sådant fall bestäm invers avbildning.

F är inverterbar då

$$\det([F]) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Matrisen till inversen är

$$[F^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket betyder att $F^{-1}(x,y,z) = (x - y + z, y + z, z)$

DEL II

6. (4p) Skriv kägelsnittet $C : 4x^2 + 4xy + 4y^2 + x = 0$ på standardform. Beskriv basbytet som ger standardformen.

$$Q_C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Egen värden är $\lambda = 2, 6$ och den normala egenvektorerna är, respektive, $v_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), v_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Genom basbyte:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

CÊblir $2x'^2 + 6y'^2 + 1/\sqrt{2}x' + 1/\sqrt{2}y' = 0$. Kvadrat kompleteringen ger:

$$2(x' + 1/(4\sqrt{2}))^2 + 6(y' + 1/(12\sqrt{2}))^2 - 1/12 = 0$$

Efter basbyte

$$\begin{aligned} x'' &= x' + 1/(4\sqrt{2}) \\ y'' &= y' + 1/(12\sqrt{2}) \end{aligned}$$

har vi standard formen:

$$24x''^2 + 72y''^2 = 1$$

i.e. ekvationen av en ellips. Basbyte ges av:

$$\begin{aligned} x &= 1/\sqrt{2}x'' + 1/\sqrt{2}y'' - 1/6 \\ y &= -1/\sqrt{2}x'' + 1/\sqrt{2}y'' + 1/12 \end{aligned}$$

7. Låt A vara den linjära avbildning som speglar vektorerna, i den vanliga tredimensionella rymden, i planet med ekvationen $x + 3y - z = 0$.(ON system).

   (a) (3p) Bestäm avbildningens matris relativt ett bassystem som du väljer själv, vilket du vill.
   Låt $(x_o, y_o, z_o) \in \mathbf{R}^3$. Linjen l, normal till planet $x + 3y - z = 0$, och som går genom punkten (x_o, y_o, z_o) har ekvation:

   $$(x, y, z) = t(1, 3, -1) + (x_o, y_o, z_o).$$

   Punkten, P, där linjen träffar planet är den punkt på linjen som satisfierar ekvationen $x + 3y - z = 0$. Detta ger $11t + (x_o + 3y_o - z_o) = 0$ och $t = -\frac{1}{11}(x_o + 3y_o - z_o)$. Då är

   $$P = -\frac{1}{11}(x_o + 3y_o - z_o)(1, 3, -1) + (x_o, y_o, z_o)$$

   Bilden av punkten (x_o, y_o, z_o) genom avbildningen A, $A(x_o, y_o, z_o)$, är den punkt på linjen l, sådan att

   $$\|A(x_o, y_o, z_o) - P\| = \|P - (x_o, y_o, z_o)\|.$$

   Det följer att

   $$A(x_o, y_o, z_o) = -\frac{2}{11}(x_o + 3y_o - z_o)(1, 3, -1) + (x_o, y_o, z_o) =$$

   $$= \frac{1}{11}(9x_o - 6y_o + 2z_o, -6x_o - 9y_o + 6z_o, 2x_o + 6y_o + 9z_o).$$

   Matrisen, med avseende till standardbasen, B, är:

   $$[A]_B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & -9 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

   (b) (3p) Bestäm avbildningens matris relativt att bassystemet $B' = \{\vec{e_1} = (1, 1, 0), \vec{e_2} = (0, 1, 1), \vec{e_3} = (1, 1, 1)\}$.
   Den basbyte matrisen, från B' till B är:

   $$T_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   och

   $$T_{BB'} = T_{B'B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Avbildningens matris relativt bassystemet B' blir då:

   $$[A]_{B'} = T_{BB'}[A]_B T_{B'B}.$$

DEL III

9. Låt A och B vara 3×3 matriser.

   (a) (2p) Visa att om kolonnmatrisen X är en egenvektor till båda A och B så är X också en egenvektor till AB.
   Om $AX = \lambda_A X$ och $BX = \lambda_B X$ så är
   $$ABX = A(BX) = A(\lambda_B X) = \lambda_B AX = \lambda_B \lambda_A X.$$

   (b) (2p)Visa att om kolunn-matrisen X är en egenvektor till båda B and AB, där egenvärdet för X till B är skilt från 0, så är X en egenvektor till A?

   (c) (2p) Är det alltid sant att om kolunn-matrisen X är en egenvektor till båda A and AB så är X en egenvektor till B? Nej, det gäller inte för alla A, B. Till exempel:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   X är en egenvektor till båda A och AB, med egenvärde 0(i båda fall), men
   $$B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda X \text{ för alla } \lambda \in \mathbf{R}$$
   (Observera att påståndet alltid gäller om matrisen A är inverterbar.)

10. (a) (3p) Låt A beteckna den linär avbildning från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^4$ sådan att
   $$A(1,0,-2) = (2,1,0,1), A(1,1,0) = (0,1,1,2), A(0,1,-2) = (1,1,1,-1).$$
   Bestäm en linär avbildning B från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^4$ sådan att
   $$BA(\vec{x}) = \vec{x} \text{ för alla } \vec{x} \in \mathbf{R}^3.$$
   Samt bestäm $ker(B)$.
   Vektorerna $\vec{w_1} = (1,0,-2), \vec{w_2} = (1,1,0), \vec{w_3} = (0,1,-2)$ är linjärt oberoende för att
   $$det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 \neq 0.$$
   Så är $S = \{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}\}$ en bas till $\mathbf{R}^3$.
   Vektorerna $\vec{v_1} = (2,1,0,1), \vec{v_2} = (0,1,1,2), \vec{v_3} = (1,1,1,-1)$ är också linjärt oberoende: $a\vec{v_1} + b\vec{v_1} + c\vec{v_3} = 0$ ger $(2a+c, a+b+c, b+c, a+2b-c) = (0,0,0,0)$.
   $a+b = a+b+c = 0$ ger $a = 0$, och $2a+c = 0$ ger $c = 0$ och då $b = 0$.
   Därför kan man komplettera till en bas till $\mathbf{R}^4$:
   $$S' = \{\vec{v_1}, \vec{v_1}, \vec{v_1}, \vec{v_4}\}.$$
   Avbildningen B sådan att:
   $$B(2,1,0,1) = (1,0,-2), B(0,1,1,2) = (1,1,0), B(1,1,1,-1) = (0,1,-2) \text{ och } B(\vec{v_4}) = 0.$$
   är sådan att $BA(\vec{x}) = \vec{x}$ för alla $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$. Varje vektor $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ skrivs som $\vec{x} = a\vec{w_1} + b\vec{w_2} + c\vec{w_3}$
   $$B(A(\vec{x})) = B(aA(\vec{w_1}) + bA(\vec{w_2}) + cA(\vec{w_3})) = B(a\vec{v_1} + b\vec{v_1} + c\vec{v_3})$$

$$= aB(\vec{v_1}) + bB(\vec{v_1}) + cB(\vec{v_3}) = a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 + c\vec{w}_3 = \vec{x}.$$

Matrisen $[B]_{SS'}$ har rank 3 eftersom:

$$[B]_{S'S} = (I_3|0)$$

B är surjektiv. Det följer att $dim(Ker(B)) = 1$. Eftersom $Span(v_4) \subseteq Ker(B)$ är $Ker(B) = Span(v_4)$.

(b) (3p) Låt A beteckna den linär avbildning från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$. Under vilka förutsättningar finns det en linjär avbildning B från $\mathbf{R}^m$ to $\mathbf{R}^n$ sådan att

$$BA(\vec{x}) = AB(\vec{x}) = \vec{x} \text{ for all } \vec{x} \in \mathbf{R}^n?$$

Vad kan du säga om $Ker(B)$ och $Ker(A)$ i så fall?

Först observera att $B(0) = x$ för alla $x \in Ker(A)$. Så för att B existerar behöver man att $Ker(A) = \{0\}$ som betyder att A är one-to-one och $rk(A) = n \geq m$.

Det Samma kan man säga för BA sådant att: $n \geq m, m \geq n$, som ger $m = n$ och $rk(A) = rk(B) = n$. Dessutom detta säger att $Ker(B) = \{\vec{0}\}$ och $Ker(A) = \{\vec{0}\}$