KTH Matematik

ProvTentamen
5B1307 Linjär algebra g.k.
2005

- Skrivtid: 8:00-13:00.
- MOTIVERING krävs!
- Minst 16 päng krävs för betyg 3, minst 21 för betyg 4, minst 28 för betyg 5.

- Obs: meningen är inte att tentan innehåller uppgifterna av samma typ! Detta exemplaret visar vilket format kommer på tentamen. Uppgifterna ger en bra träning för tentamen.

DEL A (20 poäng INKLUSIVE bonus poäng)

(1) (3 p.)[inklusive bonus poäng från KS1]
Betrakta funktionen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som defineras av:
$F(x, y, z) = (-x + 3y, 2x + y + 2z, 4x + 5y - 3z)$.
Är F inverterbar?

(2) (3 p.)[inklusive bonus poäng från KS2]
Låt P_3 vara vektor rummet av polynom av grad mindre eller lika med 3. Betrakta delrummet:

$$W = \{p(x) \in P_3 \text{ sådan att } p''(x) = 0\}.$$

(a) Hitta en bas till W.
(b) Bestäm $\dim(W)$.

(3) (3 p.)[inklusive bonus poäng från KS3]
Betrakta vektor rummet P_3 med inreprodukten:

$$< p(x), q(x) >= \int_1^1 p(x)q(x).$$

Låt W vara delrummet i uppgiften (2).
Hitta en ON-bas av W.

(4) (3 p.)[inklusive bonus poäng från KS4]
Betrakta funktionen:

$$T : P_3 \to \mathbb{R}, T(p(x)) = p'(0).$$

(a) Visa att T är en linjär avbildning.
(b) Bestäm $Ker(T), R(T)$.

(5) (4 p.) Låt B vara den stardard basen till $M_{2,2}(\mathbb{R})$, och B' vara den standard basen till $\mathbb{R}^2$. Betrakta den linjära avbildning $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, med matris:

$$[T]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna

$$T \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestäm $rk(T)$.

(6) (4 p.) Skriv kägelsnitt $3x^2 - 8xy - 12y^2 - 30x - 64y = 0$ på standard form. Beskriv basbyten som ger standard formen.

DEL B (15 poäng)

(1) (5 p.) Betrakta matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) för vilken a och vilken b är A diagonaliserbar?
(b) för vilken a och vilken b är A ortogonalt diagonaliserbar?

(2) (5 p.) Låt V vara ett vektor rum men inreprodukten $<,>$. Visa att:
$\| \vec{u} \| = \| \vec{v} \|$ om och endast om $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}$ är ortogonala.

(3) (5 p.) Är $M_{2,2}$ isomorf till P_3? Om Ja skriv en isomorfi mellan dem.

Lycka till!