KTH Matematik

Tentamen
5B1307 Linjär algebra g.k.
24 okt. 2005

- Engelsk version, se backsidan.
- Skrivtid: 8:00-13:00.
- MOTIVERING krävs!
- Minst 16 poäng krävs för betyg 3, minst 21 för betyg 4, minst 28 för betyg 5.

DEL A (20 poäng INKLUSIVE bonuspoäng)

e-mail adress: ....

Bomus poäng från uppsatsen: ....

(1) (3 p.)[inklusive bonuspoäng från KS1]
Låt $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara de linjära avbildningarna:

$$T_1(x, y) = (2x, 0),\ T_2(x, y) = (x - y)$$

Är $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$?(Motivera ditt svar!)

(2) (3 p.)[inklusive bonus poäng från KS2]
Låt P_n vara vektorrummet av alla polynom av grad $\leq n$.
Låt $W = Span(1 + x^2, 1 - x^2, x^2) \subseteq P_2$
(a) Är W ett delrum? (Motivera ditt svar!)
(b) Om ja, bestäm $\dim(W)$.

(3) (3 p.) [inklusive bonuspoäng från KS3]
Betrakta den linjära avbildningen $T : P_3 \to \mathbb{R}^4$ definierad av

$$T(p(x)) = (p(-3), p(-1), p(1), p(3)).$$

(a) Skriv matrisen $[T]_{B,B'}$ med anseende på någon bas B till $\mathbb{R}^4$ och någon bas B' till P_3.
(b) Är T inverterbar?

(4) (3 p.) [inklusive bonuspoäng från KS4]
Betrakta $W = Span((1, 1, 1), (1/3, 1/3, -2/3)) \subset \mathbb{R}^3$. Den aktuella inre produkten på $\mathbb{R}^3$ är den Euklidiska inre produkten. Beräkna

$$proj_W((0, 0, 1)).$$

(5) (4 p.) Betrakta den linjära avbildningen $T : P_2 \to P_2$, som definieras av:

$$T(a + bx + cx^2) = 3a + (5a - 2b)x + (4a + c)x^2.$$

(a) Beräkna $Ker(T)$.
(b) Är T diagonaliserbar.?

(6) (4 p.) Skriv kägelsnittet $4x^2 + 4xy + 4y^2 + x = 0$ på standardform. Beskriv basbytet som ger standardformen.

DEL B (15 poäng)

(1) (5 p.) Vilka par, bland de följande, består av isomorfa vektor rum ? (motivera ditt svar!) Ange en isomorfi för varje isomorft par.
 (a) P_3, $\mathbb{R}^3$.
 (b) P_3, $\mathbb{R}^4$.
 (c) P_3, $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
 (d) $W = \{A \in M_{2,2}\mathbb{R} : tr(A) = 0\}$, $\mathbb{R}^4$.

(2) (5 p.) Betrakta $F : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ definierad av $F(A) = A^T$.
 (a) Visa att F är linjär.
 (b) Är F diagonaliserbar?

(3) (5 p.)
 (a) Låt V vara ett vektorrum och låt $U, W \subseteq V$ vara två delrum.
 Visa att: $U \cap W$ och $U + W = \{u + w$ där $u \in U, w \in W\}$ är också delrum av V.
 (b) Betrakta : $U = Span((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)), W = Span((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$, delrummen av $V = \mathbb{R}^4$. Beräkna $\dim(U), \dim(W), \dim(U \cap W), \dim(U + W)$.

Lycka till!

(1) (3 p.)[including bonuspoints from KS1]
Let $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be the linear functions

$$T_1(x, y) = (2x, 0),\ T_2(x, y) = x - y$$

Is $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$?(Motivate your answer!)

(2) (3 p.)[including bonus points from KS2]
Let P_n be the vector space of polynomials of degree $\leq n$.
Let $W = Span(1 + x^2, 1 - x^2, x^2) \subseteq P_2$
(a) Is W a subspace? (Motivate your answer!)
(b) If yes, what is $\dim(W)$?

(3) (3 p.) [including bonuspoints from KS3]
Consider the linear function $T : P_3 \to \mathbb{R}^4$ defined by

$$T(p(x)) = (p(-3), p(-1), p(1), p(3)).$$

(a) Write the matrix $[T]_{B,B'}$ with respect to some basis B of $\mathbb{R}^4$ and some basis B' of P_3.
(b) Is T invertible?

(4) (3 p.) [including bonuspoints from KS4]
Consider $W = Span((1, 1, 1), (1/3, 1/3, -2/3)) \subset \mathbb{R}^3$, with the Euclidian inner product. Find

$$proj_W((0, 0, 1)).$$

(5) (4 p.) Consider the linear function $T : P_2 \to P_2$, defined by

$$T(a + bx + cx^2) = 3a + (5a - 2b)x + (4a + c)x^2.$$

(a) Describe $Ker(T)$.
(b) Is T diagonalizable.?

(6) (4 p.) Write the conic section $4x^2+4xy+4y^2+x=0$ in standardform. Describe the base-change giving the standardform.

DEL B (15 poäng)

(1) (5 p.) Which of the following pairs of vector spaces are isomorfic? (motivate your answer!) Give an isomorphism for each pair of isomorphic vector spaces.
   (a) P_3, $\mathbb{R}^3$.
   (b) P_3, $\mathbb{R}^4$.
   (c) P_3, $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
   (d) $W=\{A\in M_{2,2}\mathbb{R} : tr(A)=0\}$, $\mathbb{R}^4$.

(2) (5 p.) Consider $F: M_{2,2}(\mathbb{R})\to M_{2,2}(\mathbb{R})$ defined by $F(A)=A^T$.
   (a) Show that F is linear.
   (b) Is F diagonalizable?

(3) (5 p.)
   (a) Let V be a vector space and let $U,W\subseteq V$ be two subspaces.
   Show that: $U\cap W$ och $U+W=\{u+w$ där $u\in U, w\in W\}$ are also subspaces of V.
   (b) Consider : $U=Span((1,0,0,0),(0,1,0,0)), W=Span((0,1,0,0),(0,0,1,0))$, which are subspaces of $V=\mathbb{R}^4$. Find $\dim(U), \dim(W), \dim(U\cap W)$, $\dim(U+W)$.