KTH Matematik

5B1307, Linjär algebra
Tentamen
Augusti, 2005

- *Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare med sifferdisplay.*
- *Den här tentamen består av två delar: del A och del B.*
- *Del A ger, inklusive bonuspoäng, maximalt 16 poäng.*
  För betyg 3,4,5 krävs rispektive 16, 26, 35.
- *Motivering krävs!*

DEL **A**

(1) Låt $W \subset M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ vara delmängden av alla matriser $A = (a_{ij})$ med

$$a_{2,3} = a_{3,2} = a_{3,3} = 0.$$

(a) (3p) Visa att W är ett delrum till $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
(b) (3p) Bestäm $\dim(W)$.

(2) Låt $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Spåret av matrisen $A = (a_{i,j}) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definieras som $tr(A) = a_{1,1} + a_{2,2}$. Den transponerad matrisen av A definieras som $A^T = (b_{i,j})$ där $b_{i,j} = a_{j,i}$. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Betrakta avbildningen

$$T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

som till en matris B utpekar $T(B) = tr(A \cdot B^T)$.
(a) (4p) Visa att T är en linjär avbildning.
(b) (3p) Skriv matrisen $[T]_\beta^\alpha$ med avseende på någon bas β för $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ och någon bas α för $\mathbb{R}$.
(c) (3p) Bestäm $\dim(N(T))$.
(d) (3p) Bestäm $\dim(R(T))$.

(3) (7p)Visa att

$$< A, B >= tr(A \cdot B^T) \quad \text{för alla } A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

definierar en inne-produkt på $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

DEL **B**

(1) Låt $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ vara vektorrummet av funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Låt

$$H = Span(\cos(t), \sin(t), t\cos(t), t\sin(t)).$$

(a) (5p) Visa att $\dim(H) = 4$.

(b) (5p) Låt $T : H \to H$ vara avbildningen $T(f(t)) = f''(t) + f(t)$. Visa att T är linjär och bestäm delrummet $N(T)$.

(c) (5p) Är $\cos(t) \in R(T)$?

(2) (10 pt) Låt $U \subset \mathbb{R}^n$ vara ett delrum och låt $x \in \mathbb{R}^n$. Visa att $x \in U$ om och endast om $proj_U(x) = x$.

(3) (10 pt) Låt $A \in M_{n,n}$ vara inverterbar. Visa att raderna utgör en bas till $\mathbb{R}^n$.