KTH Matematik

Tentamen
5B1307 Linjär algebra g.k.
24 okt. 2005

- Engelsk version, se backsidan.
- Skrivtid: 8:00-13:00.
- MOTIVERING krävs!
- Minst 16 poäng krävs för betyg 3, minst 21 för betyg 4, minst 28 för betyg 5.

DEL A (20 poäng INKLUSIVE bonuspoäng)

e-mail adress: ....

Bomus poäng från uppsatsen: ....

(1) (3 p.)[inklusive bonuspoäng från KS1]
Låt $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara de linjära avbildningarna:

$$T_1(x, y) = (2x, 0),\ T_2(x, y) = (x, -y)$$

Är $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$?(Motivera ditt svar!)
$T_1 \circ T_2(x, y) = T_1(x, -y) = (2x, 0), T_2 \circ T_1(x, y) = T_2(x, -y) = (2x, 0)$. Då är $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

(2) (3 p.)[inklusive bonus poäng från KS2]
Låt P_n vara vektorrummet av alla polynom av grad $\leq n$.
Låt $W = Span(1 + x^2, 1 - x^2, x^2) \subseteq P_2$
(a) Är W ett delrum? (Motivera ditt svar!) $Span(v_1, ..., v_n)$ där $v_1, ..., v_n \in V$ är alltid ett delrum av V.
(b) Om ja, bestäm $\dim(W)$. Vektorer $1 + x^2, 1 - x^2, x^2$ inte är linjärt oberoende eftersom $x^2 = 1/2(1 + x^2) - 1/2(1 - x^2)$. Vekorerna $1 + x^2, 1 - x^2$ är linjärt oberoende så är $\dim(W) = 2$.

(3) (3 p.) [inklusive bonuspoäng från KS3]
Betrakta den linjära avbildningen $T : P_3 \to \mathbb{R}^4$ definierad av

$$T(p(x)) = (p(-3), p(-1), p(1), p(3)).$$

(a) Skriv matrisen $[T]_{B,B'}$ med anseende på någon bas B till $\mathbb{R}^4$ och någon bas B' till P_3. Tar standard basen till P_3, och $\mathbb{R}^4$. $T(1) = (1, 1, 1, 1), T(x) = (-3, -1, 1, 3), T(x^2) = (9, 1, 1, 9), T(x^3) = (-27, -1, 1, 27)$
Matrisen är :

$$[T]_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

(b) Är T inverterbar? Systemet $[T]_{B,B'}(\vec{x}) = \vec{0}$ ger $\vec{x} = \vec{0}$. Det betyder att $null(T) = 0$ och att T är invetrterbar.

(4) (3 p.) [inklusive bonuspoäng från KS4]
Betrakta $W = Span((1,1,1),(1/3,1/3,-2/3)) \subset \mathbb{R}^3$. Den aktuella inre produkten på $\mathbb{R}^3$ är den Euklidiska inre produkten. Beräkna

$$proj_W((0,0,1)).$$

Observera att $1/3(1,1,1) - (1/3,1/3,-2/3) = (0,0,1)$ då är $(0,0,1) \in W$ och

$$proj_W((0,0,1)) = (0,0,1).$$

(5) (4 p.) Betrakta den linjära avbildningen $T : P_2 \to P_2$, som definieras av:

$$T(a + bx + cx^2) = 3a + (5a - 2b)x + (4a + c)x^2.$$

(a) Beräkna $Ker(T)$. I standad basen β är matrisen:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Metrisen är undertriangulär och $\det([T]_\beta) = -6 \neq 0$. Det betyder at matrisen är inverterbar som ger $Ker(T) = \{0\}$.

(b) Är T diagonaliserbar.? Eftersom matrisen är unudertriangulär ser vi att egenvärden är $3, -2, 1$. En 3×3 matris med tre olika egenvärde är diagonaliserbar.

(6) (4 p.) Skriv kägelsnittet $C : 4x^2 + 4xy + 4y^2 + x = 0$ på standardform. Beskriv basbytet som ger standardformen.

$$Q_C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Egenvärden är $\lambda = 2, 6$ och den normala egenvektorerna är, respektive, $v_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), v_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Genom basbyte:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

C blir $2x'^2 + 6y'^2 + 1/\sqrt{2}x' + 1/\sqrt{2}y' = 0$. Kvadrat kompleteringen ger:

$$2(x' + 1/(4\sqrt{2}))^2 + 6(y' + 1/(12\sqrt{2}))^2 - 1/12 = 0$$

Efter basbyte

$$\begin{aligned} x'' &= x' + 1/(4\sqrt{2}) \\ y'' &= y' + 1/(12\sqrt{2}) \end{aligned}$$

har vi standard formen:

$$24x''^2 + 72y''^2 = 1$$

i.e. ekvationen av en ellips. Basbyte ges av:

$$\begin{aligned} x &= 1/\sqrt{2}x'' + 1/\sqrt{2}y'' - 1/6 \\ y &= -1/\sqrt{2}x'' + 1/\sqrt{2}y'' + 1/12 \end{aligned}$$

DEL B (15 poäng)

(1) (5 p.) Vilka par, bland de följande, består av isomorfa vektor rum ? (motivera ditt svar!) Ange en isomorfi för varje isomorft par.

Två vektor rum är isomorfa om och endast om de har samma dimensionen. Då har vi att:

(a) P_3 och $\mathbb{R}^3$ inte är isomorfa eftersom $\dim(P_3) = 4, \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

(b) $P_3, \mathbb{R}^4$ är isomorfa eftersom $\dim(P_3) = 4, \dim(\mathbb{R}^4) = 3$. En isomorfi $f : P_3 \to \mathbb{R}^4$ kan definieras som $f(a + bx + cx^2 + d) = (a, b, c, d)$.

(c) P_3 och $M_{2,2}(\mathbb{R})$ är isomorfa eftersom $\dim(P_3) = 4, \dim(M_{2,2}(\mathbb{R})) = 4$. En isomorfi $f : P_3 \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ kan definieras som

$$f(a + bx + cx^2 + d) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(d) $W = \{A \in M_{2,2}\mathbb{R} : tr(A) = 0\}$ och $\mathbb{R}^4$ inte är isomorfa. Om en matris skrivas som

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

då är

$$W = \{A \in M_{2,2}\mathbb{R} : a = -d\} = Span\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Matriserna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende. Det följer att $\dim(W) = 3 \neq \dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

(2) (5 p.) Betrakta $F : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ definierad av $F(A) = A^T$.

(a) Visa att F är linjär. Man ser att $(A + B)^T = A^T + B^T$ och $(kA)^T = kA^T$ sådan att: $F(A + B) = (A + B)^T = A^T + B^T = F(A) + F(B), F(kA) = (kA)^T = kA^T = kF(A)$.

(b) Är F diagonaliserbar? Låt β vara den standard basen av $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Då är:

$$[F]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrisen är symmetrisk så är den diagonaliserabr.

(3) (5 p.)

(a) Låt V vara ett vektorrum och låt $U, W \subseteq V$ vara två delrum.

Visa att: $U \cap W$ och $U + W = \{u + w \text{ där } u \in U, w \in W\}$ är också delrum av V.

$U \cap W$ är ett delrum:

- låt $u, w \in U \cap W$. Det betyder att $u, w \in U$ och $u, w \in V$. Eftersom U och V är vektor rum har vi att $u + v \in U$ och $u + v \in V$. Det följer att $u + v \in U \cap V$.
- Om $u \in U \cap W$ och $k \in \mathbb{R}$, på likande sätt visar man att $kv \in U \cap W$

$U + W$ är ett delrum:

- låt $u, w \in U + W$. Det betyder att $u = u_1 + u_2, w = w_1 + w_2$, där $u_1, w_1 \in U, u_2, w_2 \in V$. Då är $u + v = (u_1 + w_1) + (u_2, +w_2)$, där $(u_1 + w_1) \in U, (u_2, +w_2) \in V$ eftersom U, V är delrum. Då är $u + v \in U + V$.
- Om $u \in U + W$ och $k \in \mathbb{R}$, på likande sätt visar man att $kv \in U + W$

(b) Betrakta : $U = Span((1,0,0,0),(0,1,0,0)), W = Span((0,1,0,0),(0,0,1,0))$, delrummen av $V = \mathbb{R}^4$. Beräkna $\dim(U), \dim(W), \dim(U \cap W), \dim(U + W)$.

- $\dim(U) = \dim(W) = 2$ eftersom är $(1,0,0,0),(0,1,0,0)$ och $(0,1,0,0),(0,0,1,0)$ linärt oberoende.
- $U \cap W = Span((0,1,0,0))$ och så är $\dim(U \cap W) = 1$.
- $U + W = Span((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0))$ och så är $\dim(U + W) = 3$, eftersom är $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)$ linjärt oberoende.