KTH Matematik

5B1307, Linjär algebra
Tentamen
October 23, 2004

- *Skrivtid:* **9:00-14:00.**
- *Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare med sifferdisplay.*
- *Del A ger, inklusive bonuspoäng, maximalt 16 poäng. För betyg 3,4,5 krävs rispektive 16, 26, 35.*
- *Motivering krävs!*

DEL **A**

(1) Låt $W \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$ vara delmängden av alla diaglonala matriser (en matris $A = (a_{ij})$ är en dialgonalmatris om $a_{ij} = 0$ för $i \neq j$.)
  (a) (3p) Visa att W är ett delrum till $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
  (b) (4p) Bestäm $\dim(W)$.

(2) Låt W vara delrummet definerat i Uppgift (1). Betrakta avbildningen

$$T : W \to \mathbb{R}$$

definerad av $T(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$, där $A = (a_{ij})$.
  (a) (3p) Visa att T är en linjär avbildning.
  (b) (3p) Skriv matrisen $[T]_\beta^\alpha$ med avseende på någon bas β för W och någon bas α för $\mathbb{R}$.
  (c) (3p) Bestäm $\dim(N(T))$.
  (d) (3p) Bestäm $\dim(R(T))$.

(3) Låt $P_n(\mathbb{R})$ vara vektorrummet av polynom $f(x)$ med koefficienter i $\mathbb{R}$ och av grad $\leq n$. Betrakta produkten:

$$< f(x), g(x) >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

Låt β vara standardbasen för $P_2(\mathbb{R})$ och låt $F : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ vara linjär avbildningen definerad av matrisen:

$$[F]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  (a) (3p) Bestäm en bas till $R(F)$.
  (b) (4p) Bestäm en ortonormal bas till $R(F)$.
  (c) (4p) Är F diagonaliserbar?

DEL **B**

(1) Låt $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ vara vektorrummet av funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Låt

$$H = Span(\cos(t), \sin(t), t\cos(t), t\sin(t)).$$

(a) (5p) Visa att $\dim(H) = 4$.
(b) (5p) Låt $T : H \to H$ vara avbildningen $T(f(t)) = f''(t) + f(t)$. Visa att T är linjär och bestäm delrummet $N(T)$.
(c) (5p) Är $\cos(t) \in R(T)$?

(2) (10 pt) Låt $f_1, ..., f_n \in P_{n-1}(\mathbb{R})$ vara linjärt oberoende och $a_1 \neq a_2 \neq ... \neq a_n \in \mathbb{R}$. Låt A vara $n \times n$ matrisen $A = (a_{ij}) = (f_j(a_i))$ och $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara den linjära avbildningen som A definierar. Visa att L_A är inverterbar.

(3) (12 pt) Låt $P_n(\mathbb{R})$ vara vektorrummet med inreprodukten definerad i (3) av Del A. Ett polynom $p(t) \in P_n(\mathbb{R})$ kallas ett *udda polynom* om $p(-t) = -p(t)$ och ett *jämnt polynom* om $p(-t) = p(t)$. Låt O vara delmängden av alla udda polynom och E vara delmängden av alla jämna polynom.
(a) Visa att E, O är delrum och bestäm $\dim(O)$ och $\dim(E)$.
(b) Visa att $P_n(\mathbb{R}) = O + E$ och $O \cap E = \{0\}$.
(c) Visa att $E = O^{\perp}$ och $O = E^{\perp}$.