KTH Matematik

5B1307, Linjär algebra
Tentamen
October 23, 2004

- *Skrivtid:* **9:00-14:00.**
- *Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare med sifferdisplay.*
- *Del A ger, inklusive bonuspoäng, maximalt 16 poäng. För betyg 3,4,5 krävs rispektive 16, 26, 35.*
- *Motivering krävs!*

DEL **A**

(1) Låt $W \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$ vara delmängden av alla diaglonala matriser (en matris $A = (a_{ij})$ är en dialgonalmatris om $a_{ij} = 0$ för $i \neq j$.)

(a) Visa att W är ett delrum till $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Om A och B är diagonala matriser och $a \in \mathbb{R}$ då är $A + B$ och aA diagonala matriser. Man har att:

$$a_{ij} + b_{ij} = 0, aa_{ij} = 0, \text{ för } i \neq j.$$

(b) (4p) Bestäm $\dim(W)$. $W = Span(A_1, ..., A_n)$, där $A_k = (a^k_{ij})$ med $a^k_{ij} = 1$ om $i = j = k$ och $a^k_{ij} = 0$ annars.

$$a_1A_1 + ... + a_nA_n = 0$$

ger $a_1 = ... = a_n = 0$, då är $\beta = (A_1, ..., A_n)$ en bas till W och $\dim(W) = n$.

(2) Låt W vara delrummet definerad i Uppgiften (1). Betrakta avbildningen $T : W \to \mathbb{R}$, definerad av $T(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$, där $A = (a_{ij})$.

(a) Visa att T är en linjär avbildning. Låt $A = (a_{ij})$ och $B = (b_{ij})$, $c, d \in \mathbb{R}$, då är

$$T(cA + dB) = \sum_{1}^{n}(ca_{ii} + db_{ii}) = c\sum_{1}^{n} a_{ii} + d\sum_{1}^{n} b_{ii} = cT(A) + dT(B)$$

(b) Skriv matrisen $[T]^\alpha_\beta$ med avseende på någon bas β till W och någon bas α till $\mathbb{R}$.
Betrakta basen β och $\alpha = (1)$. $T(A_i) = 1$ för varje $i = 1, ..., n$. Då matrisen är:

$$[T]^\alpha_\beta = (1\ 1\ ...1)$$

(c)-(d) Bestäm $\dim(R(T))$ och $\dim(N(T))$. $R(T) \subseteq \mathbb{R}$. För varje $r \in \mathbb{R}$ vi har att $r = T(rA_i)$, då är $R(T) = \mathbb{R}$ och $\dim(R(T)) = 1$. Eftersom T är linjär har vi att $\dim(W) = \dim(N(T)) + \dim(R(T))$ och då är $\dim(N(T)) = n - 1$.

(3) Låt $P_n(\mathbb{R})$ vara vektorrummet av polynom $f(x)$ med koefficienterna i $\mathbb{R}$ och av grad $\leq n$. Betrakta produkten:

$$< f(x), g(x) >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

(a)

$$[F]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Betstäm en bas till $R(F)$.
Eftersom $(1, x, x^2)$ är en bas till $P_2(\mathbb{R})$ och F är linjär då är

$$W = Span(F(1), F(x), F(x^2)) = Span(1, 3x - 2, 3x^2 - x - 2).$$

F är inverterbar eftersom $det([F]_\beta) = 9 \neq 0$. Då är $\dim(R(T)) = \dim(P_2(\mathbb{R}))$. Det följer att $(1, 3x - 2, 3x^2 - x - 2)$ är en bas till $R(T) = P_2(\mathbb{R})$.
Alternativt, man ser att matrisen är övertriangolär och ranken är 3. Då är avbildningen e isomorfi och $R(T) = P_2(\mathbb{R})$. En bas är $(1, x, x^2)$.

(b) (4p) Bestäm en ortonormal bas till $R(F)$. Eftersom $R(F) = P_2(\mathbb{R})$ kan vi börja med standard basen $(1, x, x^2)$. Genom Gram-Schmidt får man ortogonala basen:

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}x, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1))$$

(c) (4p) Är F diagonaliserbar?
Matrisen är övertriangulär då är egenvärden $1, 3$ med

$$mult(3) = 2, mult(1) = 1.$$

$E_3 = \{(x, y, z) \text{ sådan att } -2(x + y + x) = 0, z = 0\} = \{t(1 - 1, 0), t \in \mathbb{R}\}$
Vi har att $\dim(E_3) = 1 \neq mult(3)$ så är F inte diagonaliserbar.

DEL **B**

(1) Låt $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ vara vektorrummet av funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Låt

$$H = Span(cos(t), sin(t), tcos(t), tsin(t)).$$

(a) Visa att $\dim(H) = 4$. Man ska bara visa att $(cos(t), sin(t), tcos(t), tsin(t))$ är linjärt oberoende. Antar att för varje $t \in \mathbb{R}$ är

$$acos(t) + bsin(t) + ctcos(t) + dtsin(t) = 0$$

för några $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- $t = 0$ ger $a = 0$

- $t = \frac{\pi}{2}$ ger $b + \frac{\pi}{2}d = 0$
- $t = \pi$ ger $-a - c\pi = 0$
- $t = -\frac{\pi}{2}$ ger $-b + \frac{\pi}{2}d = 0$

Det följer att $a = b = c = d = 0$, d.v.s. de är linjärt oberoende.

(b) Låt $T : H \to H$ vara avbildningen $T(f(t)) = f''(t) + f(t)$. Visa att T är linjär och bestäm $N(T)$.

T är linär eftersom f och f' är linjära. Låt $\beta = (cos(t), sin(t), tcos(t), tsin(t))$,

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $T(acos(t) + bsin(t) + ctcos(t) + dtsin(t)) = -2dcos(t) + 2csin(t)$. Det betyder att $N(T) = Span(cos(t), sin(t))$.

(c) Är $cos(t) \in R(T)$? Vi ser att $R(T) = Span(cos(t), sin(t))$ och då är $cos(t) \in R(T)$.

(2) Låt $f_1, ..., f_n \in P_{n-1}(\mathbb{R})$ vara linjärt oberoende och $a_1 \neq a_2 \neq ... \neq a_n \in \mathbb{R}$. Låt A vara den $n \times n$ matrisen $A = (a_{ij}) = (f_j(a_i))$ och $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara linjär avbildningen som A definierar. Visa att L_A är inverterbar.

$$A = \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & ... & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & ... & f_n(a_2) \\ f_1(a_3) & f_2(a_3) & ... & f_n(a_3) \\ ... & ... & ... & ... \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & ... & f_n(a_n) \end{pmatrix}$$

Så

$$L_A(b_1, b_2, ..., b_n) = (\sum_{i=1}^{n} b_i f_i(a_1), ..., \sum_{i=1}^{n} b_i f_i(a_n))$$

L_A är inverterbar om och endast om $N(L_A) = \{0\}$.

Låt $g = (b_1 f_1 + ... + b_n f_n)(x) \in P_{n-1}(\mathbb{R})$, då är

$(b_1, b_2, ..., b_n) \in N(L_A)$ om och endast om $g(a_1) = g(a_2) = ... = g(a_n) = 0$.

Men g har grad $n-1$ så är $g = b_1 f_1 + ... + x_b f_n = 0$. Eftersom $(f_1, ..., f_n)$ är linjärt oberoende är $b_1 = ... = b_n = 0$. Det visar att $N(L_A) = \{0\}$ och då att L_A är inverterbar.

(3) Låt $P_n(\mathbb{R})$ vara vektorrummet med inreprodukten definerad i (3) av Del A. Ett polynom $p(t) \in P_n(\mathbb{R})$ kallas ett *udda polynom* om $p(-t) = -p(t)$ och ett *jämnt polynom* om $p(-t) = p(t)$. Låt O vara delmängden av alla udda polynom och E vara delmängden av alla jämna polynom.

(a) Visa att E, O är delrum och bestäm $\dim(O)$ och $\dim(E)$.
Man ser att $f \in E$ har mara jämna potenser av x, så är

$$E = \begin{cases} Span(1, x^2, x^4, ..., x^n) & \text{om } n \text{ är jämn} \\ Span(1, x^2, x^4, ..., x^{n-1}) & \text{om } n \text{ är odda} \end{cases}$$

På sett är

$$O = \begin{cases} Span(x, x^3, x^5, ..., x^{n-1}) & \text{om } n \text{ är jämn} \\ Span(x, x^3, x^5, ..., x^n) & \text{om } n \text{ är odda} \end{cases}$$

Eftersom är alla odda potenser och alla jämna potenser del av en bas för $P_n(\mathbb{R})$, delmängder:

$$\begin{cases} (1, x^2, x^4, ..., x^n), (x, x^3, x^5, ..., x^{n-1}) & \text{är en bas för E, rispektive O} \\ & \text{om} n \text{ är jämn} \\ (1, x^2, x^4, ..., x^{n-1}), (x, x^3, x^5, ..., x^n) & \text{är en bas för E, rispektive O} \\ & \text{om } n \text{ är odda} \end{cases}$$

och:

$$\begin{cases} \dim(E) = \frac{n}{2} + 1, \dim(O) = \frac{n}{2} & \text{om } n \text{ är jämn} \\ \dim(E) = \frac{n+1}{2}, \dim(O) = \frac{n+1}{2} & \text{om } n \text{ är odda} \end{cases}$$

(b) Visa att $P_n(\mathbb{R}) = O + E$ och $O \cap E = \{0\}$.
Varje polynom $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \in P_n(\mathbb{R})$ skrivas som $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + ...) + (a_1 x^+ a_3 x^3 + ...)$ där $f_1(x) \in E$ och $f_2(x) \in O$. det visar att $P_n(\mathbb{R}) = O + E$.
Eftersom polynomen i E har bara jämna potenser av x och polynomen i O har bara odda potenser av x är $O \cap E = \{0\}$.

(c) Visa att $E = O^{\perp}$ och $O = E^{\perp}$.

$$< x^i, x^j >= \int_{-1}^{1} x^{i+j} dt = \begin{cases} 0 & \text{om } i+j \text{ odda , dvs} \\ & x^i \in E, x^j \in O \text{ eller } x^i \in O, x^j \in E \\ \frac{2}{i+j+1} & \text{annars} \end{cases}$$

Det visar att varje element i en bas av E är otogonalt till varje element av en bas av O, så $E \subseteq O^{\perp}$ och $O \subseteq E^{\perp}$. Dimensions räkningen visar att:$E = O^{\perp}$ och $O = E^{\perp}$.