

8.4.II.2

sid 274

"Olika kvinnor kan inte föda samma person. Olika kvinnor födde Adam och Berthl. Alltså kan inte Cesar vara både Adam och Berthl."

Bevisa att detta resonemang är korrekt!

Med följande ordlista: $F_{-} - \text{ föder } -$

$K_{-} : - \text{ är kvinna}$

a: Adam

b: Berthl

c: Cesar

kan resonemanget symboliseras som:

$$(\forall x)(\forall y)((Kx \& Ky) \& x \neq y) \rightarrow \sim(\exists z)(Fxz \& Fyz)$$

$$(\exists x)(\exists y)((Kx \& Ky) \& x \neq y) \& (Fxa \& Fyb)$$

$$\therefore \sim(c=a \& c=b)$$

Att slutsatsen följer av premisserna kan bevisas med naturlig deduktion.

1	(1)	$(\forall x)(\forall y)((Kx \& Ky) \& x \neq y) \rightarrow \sim(\exists z)(Fxz \& Fyz)$	premiss
2	(2)	$(\exists x)(\exists y)((Kx \& Ky) \& x \neq y) \& (Fxa \& Fyb)$	premiss
1	(3)	$(\forall y)((Kd \& Ky) \& d \neq y) \rightarrow \sim(\exists z)(Fdz \& Fyz)$	1 $\forall E$
1	(4)	$((Kd \& Ke) \& d \neq e) \rightarrow \sim(\exists z)(Fdz \& Fez)$	3 $\forall E$
5	(5)	$c = a \& c = b$	antagande
5	(6)	$c = a$	5 $\&E$
5	(7)	$c = b$	5 $\&E$
8	(8)	$(\exists y)((Kd \& Ky) \& d \neq y) \& (Fda \& Fyb)$	antagande (för $\exists E$ från rad 2)
9	(9)	$((Kd \& Ke) \& d \neq e) \& (Fda \& Feb)$	antagande (för $\exists E$ från rad 8)
9	(10)	$(Kd \& Ke) \& d \neq e$	9 $\&E$
9	(11)	$Fda \& Feb$	9 $\&E$
1,9	(12)	$\sim(\exists z)(Fdz \& Fez)$	4,10 $\rightarrow E$
	(13)	$c = c$	$=I$
5	(14)	$a = c$	6,13 $=E$
5	(15)	$b = c$	7,13 $=E$
5,9	(16)	$Fdc \& Feb$	14,15 $=E$
5,9	(17)	$Fdc \& Fec$	15,16 $=E$
5,9	(18)	$(\exists z)(Fdz \& Fez)$	17 $\exists I$
15,9	(19)	\perp	12,18 $\sim E$
1,5,8	(20)	\perp	8,9,19 $\exists E$
1,2,5	(21)	\perp	2,8,20 $\exists E$
1,2	(22)	$\sim(c = a \& c = b)$	5,21 $\sim I$

Observera raderna 13-15. Detta görs för att "vända på" identiteterna på rad 6,7 så att regeln $=E$ får användas. Denna regel säger att det som står till vänster i en identitet, t.ex. $a = b$, får bytas ut mot det som står till höger i ~~identiteten~~ identiteten. I vårt exempel byts a på rad 14 ut mot c för att få rad 16.