Visa (med resonemang) att $\forall x \forall y (x+y=y \rightarrow x=0)$ följer från Peanos axiom.

<u>Ledning:</u> Låt a vara godtycklig och visa att $\forall y (a+y=y \rightarrow a=0)$.

Tag ett godtyckligt a. Låt oss visa med induktion att $\forall y (a+y=y \rightarrow a=0)$. Låt ϕy beteckna formeln $a+y=y \rightarrow a=0$.

<u>Basfall</u> (Vi ska här visa $\phi 0$, dvs $a+0=0 \rightarrow a=0$.)

Antag att $a+0=0$. Från P3 följer att $a+0=a$. Alltså följer då $a=0$. Vi har alltså visat att $a+0=0 \rightarrow a=0$, det vill säga $\phi 0$.

<u>Induktion</u> (Vi ska här visa att $\forall x (\phi x \rightarrow \phi S(x))$.)

Låt b vara godtycklig och antag att ϕb gäller, det vill säga att

$$a+b=b \rightarrow a=0. \qquad (*)$$

Antag att $a+S(b)=S(b)$. Från P4 följer $a+S(b)= = S(a+b)$, och därmed har vi att $S(a+b)=a+S(b)=S(b)$. Från P1 följer nu $a+b=b$ och enligt induktionsantagandet $(*)$ har vi att $a=0$. Alltså har vi visat

$$a+S(b)=S(b) \rightarrow a=0,$$

det vill säga att $\phi S(b)$.

Sammantaget har det visats att $\phi b \rightarrow \phi S(b)$ och eftersom b var godtycklig följer $\forall x (\phi x \rightarrow \phi S(x))$.

Enligt induktionsprincipen har vi visat att

$\forall y \phi y$, det vill säga $\forall y (a+y=y \rightarrow a=0)$,

och eftersom a var godtycklig så följer

$$\forall x \forall y (x+y=y \rightarrow x=0).$$