Relationer mellan sentenser

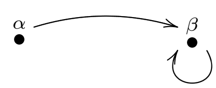
Andreas Enblom, 2006-11-16

1 Återblick. Tidigare har vi sett binära relationer. Dessa är helt enkelt tvåställiga predikat. För ett tvåställigt predikat P kan vi betrakta sentenser som

$$\forall x \exists y Pxy \quad \text{och} \quad Pab.$$

Vi har alltså en relation mellan individer, och de tolkningar som gör dessa sentenser sanna eller falska innehåller individer och information om för vilka par av individer relationen är sann.

2 Exempel. I tolkningen



är sentenserna Pab och Pbb sanna medan Paa och Pba är falska. Alltså är $\forall x Pxx$ falskt medan $\exists x Pxx$ är sant. Vidare är $\forall x \exists y Pxy$ sant eftersom $\exists y Pay$ och $\exists y Pby$ båda är sanna.

3 Relationer mellan sentenser. Nu ska vi istället betrakta relationer mellan sentenser. Vi kommer att beteckna med $\mathscr{R}, \mathscr{S}, \mathscr{T}, \ldots$ sådana relationer och med $p, q, r, \ldots$ sentens*variabler* (jämför med $x, y, z, \ldots$ som betecknar individvariabler). Därmed är de påståenden vi kan göra sånt som

$$\text{för alla } p \text{ existerar ett } q \text{ så att } \mathscr{R}pq$$

och

$$\mathscr{S}\left(\forall x Fx, \exists y Gya \to B\right).$$

Jämför detta med de predikatlogiska påståendena/sentenserna $\forall x \exists y Fxy$ och Gab. I den sistnämnda sentensen finns de två specifika individerna a och b. I påståendet $\mathscr{S}\left(\forall x Fx, \exists y Gya \to B\right)$ finns de två specifika sentenserna $\forall x Fx$ och $\exists y Gya \to B$.

4 Filosofisk utvikning. Vi kan inte påstå saker som $\forall p \exists q (\mathscr{R}pq \to \mathscr{S}pq)$ eftersom implikationen $\to$ bara kan sättas mellan sentenser. Påståendet $\mathscr{R}pq$ är inte en sentens utan ett påstående om sentenser. Däremot skulle vi kunna uttrycka detta genom att säga

$$\text{för alla sentenser } p \text{ existerar en sentens } q \text{ så att om } \mathscr{R}pq \text{ så } \mathscr{S}pq.$$

Eventuellt kan man också invända mot att använda symbolerna $\forall$ och $\exists$ till annat än individvariabler, det vill säga att skriva exempelvis $\forall p$ med en sentensvariabel p, så därför gör vi inte det här.

5 Hur kan dessa relationer mellan sentenser se ut? En tanke är att ta som exempel en relation $\mathscr{R}$ där

$$\mathscr{R}pq \quad \text{betyder att} \quad p \to q.$$

Men detta fungerar inte! Låt exempelvis p vara sentensen $\forall x Qx$ och q sentensen $A \vee {\sim}\exists x Fx$. Är då påståendet $\mathscr{R}pq$ sant eller falskt? Det går inte att svara på; det beror på tolkningen.

1. I tolkningen

$$\begin{gathered} D = \{\alpha, \beta\} \\ \text{Ext}(Q) = \{\alpha, \beta\} \\ \text{Ext}(F) = \{\beta\} \\ A : \text{falsk} \end{gathered}$$

   är sentensen $p \to q$ falsk eftersom p, det vill säga sentensen $\forall x Qx$, är sann, medan q, det vill säga sentensen $A \vee \sim\exists x Fx$, är falsk (både A och $\sim\exists x Fx$ är ju falska).

2. I tolkningen

$$\begin{gathered} D = \{\alpha, \beta\} \\ \text{Ext}(Q) = \{\alpha\} \\ \text{Ext}(F) = \{\beta\} \\ A : \text{falsk} \end{gathered}$$

   är sentensen $p \to q$ sann eftersom p, det vill säga sentensen $\forall x Fx$, är falsk.

Bättre är att ha relationer som uttalar sig om *tolkningar*.

6 Exempel. Låt $\mathscr{R}$ vara en relation mellan sentenser som definieras av att

$$\mathscr{R}pq \quad \text{betyder att} \quad p \nvDash \sim q,$$

det vill säga att det finns en tolkning som gör p sann men $\sim q$ falsk.

Om vi låter p vara sentensen $A \to B$ och q vara sentensen $\forall x Fx$ så är $\mathscr{R}pq$ ett sant påstående eftersom exempelvis tolkningen

$$\begin{gathered} D = \{\alpha, \beta\} \\ \text{Ext}(F) = \{\alpha\} \\ A : \text{falsk} \quad B : \text{sann} \end{gathered}$$

gör p sann men q falsk.

Om vi istället låter p vara sentensen $A \; \& \sim A$ och q vilken sentens som helst så är påståendet $\mathscr{R}pq$ falskt eftersom det inte finns någon tolkning som gör p sann. I synnerhet finns det ingen tolkning som gör p sann och $\sim q$ falsk.

7 Exempel. Låt $\mathscr{S}$ vara en relation mellan sentenser som definieras av att

$$\mathscr{S}pq \quad \text{betyder att} \quad \vDash p \vee q \text{ eller } \vDash p \leftrightarrow q,$$

det vill säga att $p \vee q$ är sant i alla tolkningar, eller att $p \leftrightarrow q$ är sant i alla tolkningar. Observera att det är en enorm skillnad på detta och påståendet att $p \vee q$ eller $p \leftrightarrow q$ är sant i alla tolkningar. Det senare är ju påståendet $\vDash (p \vee q) \vee (p \leftrightarrow q)$.

8 Exempel. Låt $\mathscr{T}$ vara en relation mellan sentenser som definieras av att

$$\mathscr{T}pq \quad \text{betyder att} \quad p \vee q \vdash p \;\&\; q,$$

det vill säga att det går att härleda med naturlig deduktion att från premissen $p \vee q$ följer $p \;\&\; q$.

Detta är naturligtvis inte sant för alla p och q. Exempelvis så går det ju inte att härleda $\forall xFx \mathbin{\&} (B \rightarrow A)$ från $\forall xFx \vee (B \rightarrow A)$. Alltså är påståendet $\mathscr{T}(\forall xFx, B \rightarrow A)$ falskt.

Däremot finns det vissa fall då $\mathscr{T}pq$ är sant, exempelvis är ju $\mathscr{T}(A, A)$ sant. Det är ju en enkel match att visa att $A \vee A \vdash A \mathbin{\&} A$, eller hur?

Alltså gäller i detta fall att

$$\text{det finns sentenser } p \text{ och } q \text{ sådana att } \mathscr{T}pq$$

medan

$$\text{det är inte så att för alla sentenser } p \text{ och } q \text{ gäller } \mathscr{T}pq.$$

9 Ekvivalensrelationer. Nu när vi vet vad en relation mellan sentenser är kan vi också undersöka om dessa relationer är reflexiva, symmetriska eller transitiva.

10 Definition. Låt $\mathscr{R}$ vara en relation mellan sentenser.

1. Om $\mathscr{R}pp$ gäller för alla sentenser p så sägs $\mathscr{R}$ vara *reflexiv*.
2. Antag att om $\mathscr{R}pq$ gäller så gäller även $\mathscr{R}qp$, för alla sentenser p och q. Då sägs $\mathscr{R}$ vara *symmetrisk*.
3. Antag, för alla sentenser p, q och r, att om $\mathscr{R}pq$ och $\mathscr{R}qr$ gäller så gäller även $\mathscr{R}pr$. Då sägs $\mathscr{R}$ vara *transitiv*.
4. Om $\mathscr{R}$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv så sägs $\mathscr{R}$ vara en *ekvivalensrelation*.

11 Anmärkning. Om man exempelvis ska visa att en relation $\mathscr{R}$ inte är symmetrisk ska man alltså hitta specifika sentenser p och q sådana att påståendet "om $\mathscr{R}pq$ så $\mathscr{R}qp$" är falskt, det vill säga sådana att $\mathscr{R}pq$ är sant medan $\mathscr{R}qp$ är falskt.

12 Exempel. Låt relationen $\mathscr{R}$ definieras av att

$$\mathscr{R}pq \quad \text{betyder att} \quad p \not\models \sim q.$$

Avgör om relationen $\mathscr{R}$ är reflexiv, symmetrisk och/eller transitiv.

Lösning: Relationen $\mathscr{R}$ är inte reflexiv eftersom om vi låter p vara sentensen $A \mathbin{\&} \sim A$ så finns det ju ingen tolkning i vilken p är sann. I synnerhet finns det ingen tolkning i vilken p är sann medan $\sim p$ är falsk. Därmed är det inte så att $p \not\models \sim p$. Alltså finns en sentens p sådan att $\mathscr{R}pp$ inte gäller.

Vidare, tag godtyckliga sentenser p och q och antag att $\mathscr{R}pq$, det vill säga att

$$p \not\models \sim q.$$

Det betyder att det finns en tolkning i vilken p är sann medan $\sim q$ är falsk. Det följer att $\sim p$ är falsk och att q är sann i denna tolkning. Alltså finns det en tolkning som gör q sann men $\sim p$ falsk. Det betyder att

$$q \not\models \sim p$$

gäller, det vill säga att $\mathscr{R}qp$. Nu har vi alltså visat påståendet

$$\text{om } \mathscr{R}pq \text{ så } \mathscr{R}qp,$$

och eftersom p och q var godtyckliga så gäller detta för alla p och q. Alltså är relationen $\mathscr{R}$ symmetrisk.

Till sist, låt p vara sentensen A, q vara sentensen $\forall x Fx$ och r vara sentensen $\sim A$. Betrakta först tolkningen

$$\begin{gathered} D = \{\alpha\} \\ \text{Ext}(F) = \{\alpha\} \\ A : \text{sann.} \end{gathered}$$

I denna tolkning är p sann medan $\sim q$ är falsk. Alltså gäller $p \not\vDash \sim q$, det vill säga $\mathscr{R}pq$. I tolkningen

$$\begin{gathered} D = \{\alpha\} \\ \text{Ext}(F) = \{\alpha\} \\ A : \text{falsk} \end{gathered}$$

är q sann medan $\sim r$ är falsk. Alltså gäller $q \not\vDash \sim r$, det vill säga $\mathscr{R}qr$. Men däremot gäller inte $A \not\vDash \sim\sim A$, eftersom det ju är så att $A \vDash \sim\sim A$. Alltså gäller inte $\mathscr{R}pr$. Alltså finns sentenser p, q och r sådana att $\mathscr{R}pq$ och $\mathscr{R}qr$ gäller, men inte $\mathscr{R}pr$. Alltså är relationen $\mathscr{R}$ inte transitiv.

13 Exempel. Låt relationen $\mathscr{S}$ definieras av att $\mathscr{S}pq$ betyder

$$\vDash p \vee q \quad \text{eller} \quad \vDash p \leftrightarrow q.$$

Avgör om $\mathscr{S}$ är en reflexiv, symmetrisk och/eller transitiv.

Lösning: Tag en godtyckliga sentens p. Eftersom $p \leftrightarrow p$ är sant i alla tolkningar, så är påståendet $\mathscr{S}pp$ sant. Eftersom p var godtycklig så gäller detta för alla sentenser p. Alltså är $\mathscr{S}$ reflexiv.

Vidare, tag godtyckliga sentenser p och q, och antag att $\mathscr{S}pq$ gäller. Då har vi att

$$\vDash p \vee q$$

eller att

$$\vDash p \leftrightarrow q$$

I fallet att $\vDash p \vee q$ är sant har vi att $p \vee q$ är sant i alla tolkningar. Då gäller också att $q \vee p$ är sant i alla tolkningar, eftersom $p \vee q$ är logiskt ekvivalent med $q \vee p$. Alltså gäller $\vDash p \vee q$ och i synnerhet att $\mathscr{S}qp$ är sant i detta fall.

I det andra fallet, det vill säga att $\vDash p \leftrightarrow q$ följer på samma sätt att $\vDash q \leftrightarrow p$, och i synnerhet att $\mathscr{S}qp$.

I båda fallen har vi alltså att $\mathscr{S}qp$, och det betyder att vi har visat påståendet

$$\text{om } \mathscr{S}pq \text{ så } \mathscr{S}qp.$$

Eftersom p och q var godtyckliga så gäller detta för alla sentenser p och q. Alltså är $\mathscr{S}$ symmetrisk.

Till sist, låt

$$\begin{array}{ccc} p & \text{vara sentensen} & \forall x Qx, \\ q & \text{vara sentensen} & A \vee \sim A \end{array}$$

och

$$r \quad \text{vara sentensen} \quad \exists y Fy.$$

Eftersom q är sann i alla tolkningar så är både $p \vee q$ och $q \vee r$ sant i alla tolkningar. Vi har alltså att $\vDash p \vee q$ och att $\vDash q \vee r$. Det följer att $\mathscr{S}pq$ och $\mathscr{S}qr$ båda gäller.

Låt oss nu visa att $\mathscr{S}pr$ inte gäller. I exempelvis tolkningen

$$\begin{gathered} D = \{\alpha, \beta\} \\ \mathrm{Ext}(F) = \emptyset \\ \mathrm{Ext}(Q) = \{\alpha\} \\ A: \text{ sann} \end{gathered}$$

är varken $\forall x Qx$ eller $\exists y Fy$ sanna. Alltså finns det minst en tolkning där $p \vee r$ är falskt. Alltså gäller inte $\vDash p \vee r$.

Vi har även att $\vDash p \leftrightarrow r$ är falskt eftersom det finns en tolkning, exempelvis

$$\begin{gathered} D = \{\alpha, \beta\} \\ \mathrm{Ext}(F) = \{\alpha\} \\ \mathrm{Ext}(Q) = \{\alpha\} \\ A: \text{ sann} \end{gathered}$$

där p, det vill säga sentensen $\forall x Qx$, är falsk, medan r, det vill säga sentensen $\exists y Fy$, är sann.

Alltså har vi visat att både $\vDash p \vee r$ och $\vDash p \leftrightarrow r$ är falska. Det betyder att $\mathscr{S}pr$ är falskt. Alltså finns sentenser p, q och r sådana att $\mathscr{S}pq$ och $\mathscr{S}qr$ är sanna medan $\mathscr{S}pr$ är falskt. Alltså är $\mathscr{S}$ inte transitiv.

Övningsuppgifter

1. Låt relationen $\mathscr{S}$ definieras av att $\mathscr{S}pq$ betyder att $p \nvDash q$ för sentenser p och q. Avgör om $\mathscr{S}$ är reflexiv, symmetrisk och/eller transitiv.

2. Låt relationen $\mathscr{T}$ definieras av att $\mathscr{T}pq$ betyder att $p \vee q \vdash p \mathbin{\&} q$ för sentenser p och q. Avgör om $\mathscr{T}$ är reflexiv, symmetrisk och/eller transitiv.

Lösningar till övningsuppgifter

1. Låt p vara sentensen $A \vee B$ (exempelvis). Det är ju klart att $A \vee B \vDash A \vee B$. Alltså gäller *inte* $p \nvDash p$ för detta val av p. Alltså finns det (minst) en sentens p sådan att $\mathscr{S}pp$ inte gäller. Det betyder att $\mathscr{S}$ inte är reflexiv.

   Låt återigen p vara sentensen $A \vee B$ och q vara sentensen A. Vi har ju att

   $$A \vee B \nvDash A$$

   eftersom tolkningen

   $$A : \text{falsk} \quad B : \text{sann}$$

   gör premissen sann, men slutsatsen falsk. Alltså gäller $\mathscr{S}pq$ för detta val av p och q. Däremot gäller

   $$A \vDash A \vee B.$$

   Detta är självklart (och kan lätt visas med naturlig deduktion – 2 rader). Alltså gäller *inte* $\mathscr{S}qp$. Detta betyder att det finns sentenser p och q sådana att $\mathscr{S}pq$ gäller, men inte $\mathscr{S}qp$. Alltså är $\mathscr{S}$ inte symmetrisk.

   Till sist, låt p vara sentensen $\forall xFx$, q vara sentensen $\exists yGy$ och r vara sentensen $\forall xFx$. Det är nu lätt att visa följande

   $$\forall xFx \nvDash \exists yGy$$
   $$\exists yGy \nvDash \forall xFx$$
   $$\forall xFx \vDash \forall xFx.$$

   Observera att den sista raden skiljer sig från övriga eftersom den innehåller $\vDash$ istället för $\nvDash$. Alltså gäller $\mathscr{S}pq$ och $\mathscr{S}qr$ men inte $\mathscr{S}pr$ för detta val av p, q och r. Alltså finns sentenser p, q och r sådana att $\mathscr{S}pq$ och $\mathscr{S}qr$ gäller men inte $\mathscr{S}pr$. Det betyder att r inte är transitiv. Observera att vi lika gärna kunde ha låtit p vara sentensen A, q vara sentensen B, och r vara sentensen A.

2. Tag en godtycklig sentens p. Låt oss visa att $p \vee p \vdash p \mathbin{\&} p$. Detta visas på följande sätt:

1	(1)	$p \vee p$	premiss
2	(2)	p	antagande
2	(3)	$p \mathbin{\&} p$	2,2 & I
4	(4)	p	antagande
4	(5)	$p \mathbin{\&} p$	4,4 & I
1	(6)	$p \mathbin{\&} p$	1,2,3,4,5 $\vee$E

   Alltså gäller $\mathscr{T}pp$, för alla sentenser p. Det betyder att $\mathscr{T}$ är reflexiv.

Vidare, låt p och q var godtyckliga sentenser. Antag att $\mathscr{T}pq$, det vill säga att $p \vee q \vdash p \,\&\, q$. Alltså finns ett bevis i naturlig deduktion med $p \vee q$ som premiss och $p \,\&\, q$ som slutsats. Hur beviset ser ut vet vi inte, men det är klart att vi kan göra ett nytt bevis för $q \vee p \vdash q \,\&\, p$ enligt följande:

1	(1)	$q \vee p$	premiss
2	(2)	q	antagande
2	(3)	$p \vee q$	2 $\vee$I
4	(4)	p	antagande
4	(5)	$p \vee q$	4 $\vee$I
1	(6)	$p \vee q$	1,2,3,4,5 $\vee$E
		(Gammalt bevis för $p \vee q \vdash p \,\&\, q$)	
1	(n)	$p \,\&\, q$	
1	$(n+1)$	p	n &E
1	$(n+2)$	q	n &E
1	$(n+3)$	$q \,\&\, p$	$n+2, n+1$ &I

Alltså gäller $\mathscr{T}qp$. Detta betyder att $\mathscr{T}$ är symmetrisk.

Till sist, låt p, q och r vara godtyckliga sentenser, och antag att $\mathscr{T}pq$ och att $\mathscr{T}qr$. Det betyder att vi har naturliga deduktionsbevis för $p \vee q \vdash p \,\&\, q$ och $q \vee r \vdash q \,\&\, r$. Låt oss nu visa att $\mathscr{T}pr$, det vill säga att $p \vee r \vdash p \,\&\, r$:

1	(1)	$p \vee r$	premiss
2	(2)	p	antagande
2	(3)	$p \vee q$	2 $\vee$I
		(Beviset för $p \vee q \vdash p \,\&\, q$)	
2	(n)	$p \,\&\, q$	
2	$(n+1)$	q	n &E
2	$(n+2)$	$q \vee r$	$n+1$ $\vee$I
		(Beviset för $q \vee r \vdash q \,\&\, r$)	
2	(m)	$q \,\&\, r$	
2	$(m+1)$	r	m &E
2	$(m+2)$	$p \,\&\, r$	2, $m+1$ &I
$m+3$	$(m+3)$	r	antagande
$m+3$	$(m+4)$	$q \vee r$	$m+3$ $\vee$I
		(Beviset för $q \vee r \vdash q \,\&\, r$)	
$m+3$	(k)	$q \,\&\, r$	
$m+3$	$(k+1)$	q	k &E
$m+3$	$(k+2)$	$p \vee q$	$k+1$ $\vee$I
		(Beviset för $p \vee q \vdash p \,\&\, q$)	
$m+3$	(j)	$p \,\&\, q$	
$m+3$	$(j+1)$	p	j &E
$m+3$	$(j+2)$	$p \,\&\, r$	$j+1$, $m+3$ &I
1	$(j+3)$	$p \,\&\, r$	1,2,$m+2$,$m+3$,$j+2$ $\vee$E

Alltså gäller $\mathscr{T}pr$ och eftersom p, q och r var godtyckliga så betyder detta att $\mathscr{T}$ är transitiv.