KTH Matematik
Bengt Ek

$$\sim((A\leftrightarrow B)\rightarrow\sim B)$$

Svar till KS1 i Logik för D1 m.fl., 5 april 2006

A1) Vi har $p:\ (A\leftrightarrow C)\vee C,\ \ q:\ (A\rightarrow C)\,\&\,(A\vee C),\ \ r:\ (\sim A\,\&\,C)\vee\sim(A\rightarrow C)$.
Sanningsvärdestabellerna blir (med sanningsvärdena för p,q,r inramade):

A	C	$(A\leftrightarrow C)$	$\vee$	C	$(A\rightarrow C)$	$\&$	$(A\vee C)$	$(\sim A$	$\& C)$	$\vee$	$\sim$	$(A\rightarrow C)$
1	1	1	$\boxed{1}$		1	$\boxed{1}$	1	0	0	$\boxed{0}$	0	1
1	0	0	$\boxed{0}$		0	$\boxed{0}$	1	0	0	$\boxed{1}$	1	0
0	1	0	$\boxed{1}$		1	$\boxed{1}$	1	1	1	$\boxed{1}$	0	1
0	0	1	$\boxed{1}$		1	$\boxed{0}$	0	1	0	$\boxed{0}$	0	1
			p			q				r		

Vi har $\alpha)\ \ p,\ q\ \vDash\ r,\quad \beta)\ \ p,\ r\ \vDash\ q,\quad \gamma)\ \ q,\ r\ \vDash\ p.$
α) betyder precis att r får värdet 1 i alla tolkningar (dvs på alla rader i tabellen) som ger både p och q värdena 1. Den första raden visar alltså att $p,\ q\ \nvDash\ r$, dvs att α) inte är sant. Eftersom den tredje raden är den enda där dels både p och r, dels både q och r har värdena 1 och dessutom q och p båda har värdena 1 där, är β) och γ) sanna, så

Svar: $\boldsymbol{\alpha}$) är inte sant, men $\boldsymbol{\beta}$) och $\boldsymbol{\gamma}$) är sanna.

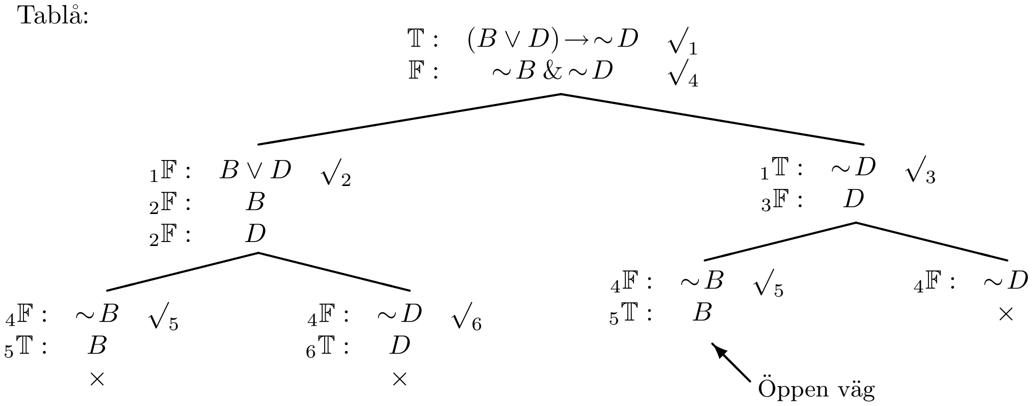
B1) Vi har $p:\sim(D\rightarrow B)\vee(B\,\&\sim D),\ \ q:\ (B\leftrightarrow D)\vee B,\ \ r:\ (D\rightarrow B)\,\&\,(B\vee D)$.
Sanningsvärdestabellerna blir (med sanningsvärdena för p,q,r inramade):

B	D	$\sim$	$(D\rightarrow B)$	$\vee$	$(B\ \&$	$\sim D)$	$(B\leftrightarrow D)$	$\vee$	B	$(D\rightarrow B)$	$\&$	$(B\vee D)$
1	1	0	1	$\boxed{0}$	0	0	1	$\boxed{1}$		1	$\boxed{1}$	1
1	0	0	1	$\boxed{1}$	1	1	0	$\boxed{1}$		1	$\boxed{1}$	1
0	1	1	0	$\boxed{1}$	0	0	0	$\boxed{0}$		0	$\boxed{0}$	1
0	0	0	1	$\boxed{0}$	0	1	1	$\boxed{1}$		1	$\boxed{0}$	0
				p				q			r	

Vi har $\alpha)\ \ p,\ q\ \vDash\ r,\quad \beta)\ \ p,\ r\ \vDash\ q,\quad \gamma)\ \ q,\ r\ \vDash\ p.$
γ) betyder precis att p får värdet 1 i alla tolkningar (dvs på alla rader i tabellen) som ger både q och r värdena 1. Den första raden visar alltså att $q,\ r\ \nvDash\ p$, dvs att γ) inte är sant. Eftersom den andra raden är den enda där dels både p och q, dels både p och r har värdena 1 och dessutom r och q båda har värdena 1 där, är α) och β) sanna, så

Svar: $\boldsymbol{\alpha}$) och $\boldsymbol{\beta}$) är sanna, men $\boldsymbol{\gamma}$) är inte sant.

A2) För att avgöra om $(B\vee D)\rightarrow\sim D\ \vDash\ \sim B\ \&\sim D$ söker vi ett motexempel, dvs en tolkning som ger VL sanningsvärdet 1 och HL värdet 0.
Tablå:



Tablån sluter sig inte, så slutledningen är **inte giltig**, vi har $\nvDash$.
Ett motexempel läses av i den öppna vägen: $v(B)=1, v(D)=0$.

B2) För att avgöra om $C \to \sim(A \vee C) \ \vDash\ \sim A \ \&\ \sim C$ söker vi ett motexempel, dvs en tolkning som ger VL sanningsvärdet 1 och HL värdet 0.

Tablå:

$\mathbb{T}: \ C \to \sim(A \vee C) \ \surd_1$
$\mathbb{F}: \ \sim A \,\&\, \sim C \ \surd_4$

Vänster gren:

${}_1\mathbb{F}: \ C$

- ${}_4\mathbb{F}: \ \sim A \ \surd_5$
  ${}_5\mathbb{T}: \ A$
  Öppen väg
- ${}_4\mathbb{F}: \ \sim C \ \surd_6$
  ${}_6\mathbb{T}: \ C$
  $\times$

Höger gren:

${}_1\mathbb{T}: \ \sim(A \vee C) \ \surd_2$
${}_2\mathbb{F}: \ A \vee C \ \surd_3$
${}_3\mathbb{F}: \ A$
${}_3\mathbb{F}: \ C$

- ${}_4\mathbb{F}: \ \sim A \ \surd_5$
  ${}_5\mathbb{T}: \ A$
  $\times$
- ${}_4\mathbb{F}: \ \sim C \ \surd_6$
  ${}_6\mathbb{T}: \ C$
  $\times$

Tablån sluter sig inte, så slutledningen är **inte giltig**, vi har $\nvDash$.
Ett motexempel läses av i den öppna vägen: $v(A) = 1, v(C) = 0$.

A3) Vi skall visa att $\sim(A \,\&\, E),\ B \to \sim E \ \vdash\ E \to (\sim A \,\&\, \sim B)$.
Idé: För att visa implikationen i HL, antar vi E. Antag så A och få motsägelse med premiss 1, så $\sim A$. Antag så B och få $\sim E$ med premiss 2, så motsägelse och $\sim B$. Tillsammans ger de $\sim A \,\&\, \sim B$.

1	(1)	$\sim(A \,\&\, E)$	premiss	
2	(2)	$B \to \sim E$	premiss	
3	(3)	E	antagande	
4	(4)	A	antagande	
3,4	(5)	$A \,\&\, E$	4,3	&I
1,3,4	(6)	⅄	1,5	~E
1,3	(7)	$\sim A$	4,6	~I
8	(8)	B	antagande	
2,8	(9)	$\sim E$	2,8	→E
2,3,8	(10)	⅄	9,3	~E
2,3	(11)	$\sim B$	8,10	~I
1,2,3	(12)	$\sim A \,\&\, \sim B$	7,11	&I
1,2	(13)	$E \to (\sim A \,\&\, \sim B)$	3,12	→I

Eftersom den önskade sentensen på rad 13 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2, är beviset klart.

B3) Vi skall visa att $B \to \sim C,\ \sim(C \,\&\, D) \ \vdash\ C \to (\sim B \,\&\, \sim D)$.
Idé: För att visa implikationen i HL, antar vi C. Antag så B och få $\sim C$ med premiss 1, så motsägelse och $\sim B$. Antag så D och få $C \,\&\, D$ och motsägelse med premiss 2, så $\sim D$. Tillsammans ger de $\sim B \,\&\, \sim D$.

1	(1)	$B \to \sim C$	premiss	
2	(2)	$\sim(C \,\&\, D)$	premiss	
3	(3)	C	antagande	
4	(4)	B	antagande	
1,4	(5)	$\sim C$	1,4	→E
1,3,4	(6)	⅄	5,3	~E
1,3	(7)	$\sim B$	4,6	~I
8	(8)	D	antagande	
3,8	(9)	$C \,\&\, D$	3,8	&I
2,3,8	(10)	⅄	2,9	~E
2,3	(11)	$\sim D$	8,10	~I
1,2,3	(12)	$\sim B \,\&\, \sim D$	7,11	&I
1,2	(13)	$C \to (\sim B \,\&\, \sim D)$	3,12	→I

Eftersom den önskade sentensen på rad 13 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2, är beviset klart.