Institutionen för matematik
KTH
Jan Kristoferson

Lösningar till KS2 i Logik för IT3, 4 november 2005

A1) "Det finns (minst) en matematiker, så att alla icke-matematiker blir förvånade om matematikern gör ett elementärt räknefel."
dvs
"Det finns x: x är en matematiker och alla icke-matematiker blir förvånade om x gör ett elementärt räknefel."
dvs
"Det finns x: x är en matematiker och för alla y: om y inte är matematiker, så blir y förvånad om x gör ett elementärt räknefel."
dvs

$$\exists x\,(Mx \ \&\ \forall y\,(\sim My \rightarrow (Rx \rightarrow Fy)))$$

Alternativa svar finns, t.ex.

$$\exists x\,(Mx \ \&\ (Rx \rightarrow \forall y\,(\sim My \rightarrow Fy)))$$

B1) "För varje matematiker finns (minst) en icke-matematiker, som blir förvånad om matematikern gör ett elementärt räknefel."
dvs
"För alla x: om x är en matematiker, så finns (minst) en icke-matematiker som blir förvånad om x gör ett elementärt räknefel."
dvs
"För alla x: om x är en matematiker, så finns y: y är inte matematiker och y blir förvånad om x gör ett elementärt räknefel."
dvs

$$\forall x\,(Mx \rightarrow \exists y\,(\sim My \ \&\ (Rx \rightarrow Fy)))$$

A2) Vi skall visa att $\forall x\,(Fx \vee Gx) \nvDash \forall x \forall y\,(Fx \vee Gy)$.
Enligt definitionen av $\vDash$ räcker det att finna en tolkning som gör $\forall x\,(Fx \vee Gx)$ sann och $\forall x \forall y\,(Fx \vee Gy)$ falsk.
Betrakta tolkningen $D = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{Ext}(F) = \{\alpha\}$, $\mathrm{Ext}(G) = \{\beta\}$.
Den gör $\forall x\,(Fx \vee Gx)$ sann, ty $Fa \vee Ga$ är sann (ty Fa är sann, ty $\alpha \in \mathrm{Ext}(F)$) och $Fb \vee Gb$ är sann (ty Gb är sann, ty $\beta \in \mathrm{Ext}(G)$).
Tolkningen gör också $\forall x \forall y\,(Fx \vee Gy)$ falsk, ty $\forall y\,(Fb \vee Gy)$ är falsk, ty $Fb \vee Ga$ är falsk, ty Fb och Ga är båda falska (ty $\beta \notin \mathrm{Ext}(F)$ och $\alpha \notin \mathrm{Ext}(G)$).
Därmed är saken klar.

B2) Vi skall visa att $\exists x\,\exists y\,(Fx\ \&\ Gy) \nvDash \exists x\,(Fx\ \&\ Gx)$.
Enligt definitionen av $\vDash$ räcker det att finna en tolkning som gör $\exists x\,\exists y\,(Fx\ \&\ Gy)$ sann och $\exists x\,(Fx\ \&\ Gx)$ falsk.
Betrakta tolkningen $D = \{\alpha, \beta\}$, $\quad \mathrm{Ext}(F) = \{\alpha\}$, $\quad \mathrm{Ext}(G) = \{\beta\}$.
Den gör $\exists x\,\exists y\,(Fx\ \&\ Gy)$ sann, ty $\exists y\,(Fa\ \&\ Gy)$ är sann, ty $Fa\ \&\ Gb$ är sann, ty Fa är sann (eftersom $\alpha \in \mathrm{Ext}(F)$) och Gb är sann (eftersom $\beta \in \mathrm{Ext}(G)$).
Å andra sidan är $\exists x\,(Fx\ \&\ Gx)$ falsk, ty $Fa\ \&\ Ga$ är falsk, ty Ga är falsk (eftersom $\alpha \notin \mathrm{Ext}(G)$), och $Fb\ \&\ Gb$ är falsk, ty Fb är falsk (eftersom $\beta \notin \mathrm{Ext}(F)$).
Därmed är saken klar.

A3) Vi skall visa att $\forall y\,Gy,\ \forall y\,\exists x\,(Gx \to Hy) \vdash \forall x\,Hx$.

1	(1)	$\forall y\,Gy$	premiss		
2	(2)	$\forall y\,\exists x\,(Gx \to Hy)$	premiss		
2	(3)	$\exists x\,(Gx \to Ha)$	2	$\forall$E	
4	(4)	$Gb \to Ha$	antagande		
1	(5)	Gb	1	$\forall$E	
1,4	(6)	Ha	4,5	$\to$E	
1,2	(7)	Ha	3,4,6	$\exists$E	[b inte i (3),(6),(1)]
1,2	(8)	$\forall x\,Hx$	7	$\forall$I	[a inte i (1),(2)]

Eftersom sentensen på rad 8 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.

B3) Vi skall visa att $\forall x\,\exists y\,(Fy \to Gx),\ \forall x\,Fx \vdash \forall y\,Gy$.

1	(1)	$\forall x\,\exists y\,(Fy \to Gx)$	premiss		
2	(2)	$\forall x\,Fx$	premiss		
1	(3)	$\exists y\,(Fy \to Ga)$	1	$\forall$E	
4	(4)	$Fb \to Ga$	antagande		
2	(5)	Fb	2	$\forall$E	
2,4	(6)	Ga	4,5	$\to$E	
1,2	(7)	Ga	3,4,6	$\exists$E	[b inte i (3),(6),(2)]
1,2	(8)	$\forall y\,Gy$	7	$\forall$I	[a inte i (1),(2)]

Eftersom sentensen på rad 8 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.