KTH Matematik
Bengt Ek
Maj 2005

Kompletteringsmaterial till kursen 5B1928 Logik för D1:

K3 Om andra ordningens predikatlogik

Vi presenterar på dessa sidor kortfattat andra ordningens predikatlogik, vilket är en utvidgning av första ordningens logik (som vi hittills studerat). Vi kommer att finna att denna utvidgning väsentligt ändrar systemets egenskaper, bland annat **gäller inte kompakthetssatsen** längre och det finns **inte något sunt och fullständigt härledningssystem** för andra ordningens predikatlogik.

Då man går från satslogik (som i detta sammanhang kan kallas "nollte ordningens predikatlogik") till första ordningens predikatlogik, får man möjlighet att "tala om" individer och att uttrycka att ett påstående gäller för någon individ eller för alla individer (dvs element i domänen för en given tolkning). Andra ordningens logik behövs om man skall uttrycka att något gäller för någon eller alla *egenskaper* eller *relationer*.
I första ordningens logik kan man till exempel uttrycka följande:
"Kalle är snäll", Sk,
"Kalle är snäll och Pelle är snäll", $Sk \,\&\, Sp$,
"Alla är snälla", $\forall x\, Sx$,
och
"Det finns minst två som är snälla och en som inte är snäll",

$$\exists x\, \exists y\, (Sx \,\&\, Sy \,\&\, x \neq y) \,\&\, \exists x \sim Sx,$$

men **inte**
"Det finns en egenskap som både Kalle och Pelle har".

För att uttrycka den senaste meningen behövs en variabel som tar egenskaper (dvs predikat) som värden. Vi kommer att använda $X, Y, \ldots$ för sådana variabler och uttrycka den sista meningen som $\exists X\, (Xk \,\&\, Xp)$.
Denna sentens är i själva verket logiskt giltig. En möjlig egenskap är ju "att vara Kalle eller Pelle" (eller en egenskap som alla har).

Vi presenterar nu kort de modifikationer som behövs för att gå från första till andra ordningens predikatlogik.

Syntax
Nya i lexikon är predikatvariabler (vilka egentligen borde vara olika för olika ställighet hos predikaten, men vi låter det framgå av sammanhanget – om det står Xa är X en enställig predikatvariabel och om det står Xab är den tvåställig etc.), och dessutom funktionsvariabler (vi kommer att använda $u, v, \ldots$ för funktionsvariabler, återigen framgår ställigheten av sammanhanget).
Reglerna för att bilda välformade uttryck (wff-ar) är som i första ordningens logik och predikatvariabler och funktionsvariabler kan stå i samma positioner som predikatkonstanter respektive funktionskonstanter. Vidare är $\forall X\phi, \exists X\phi, \forall u\phi, \exists u\phi$ wff-ar om ϕ är det.
En sentens är som i första ordningens logik en wff utan fria variabler (av något slag).

Semantik
En **tolkning** ges som i första ordningens logik av en domän (individerna) och extensioner för ingående predikat(konstanter) och referenter för (de konstanta) funktionerna.
Nya regler för att bestämma sanningsvärden för sentenser i en given tolkning gäller kvantifiering över predikat och funktioner. Sentensen $\forall X\, \phi$ är sann omm ϕ^X_F, den sentens som fås om alla X i ϕ som binds av den givna kvantifikatorn ersätts av predikatet F, är sann för **alla** predikat av rätt ställighet på domänen. Om domänen till exempel har två element, $D = \{\alpha, \beta\}$ och X är en enställig predikatsvariabel, skall fyra olika F prövas, $\text{Ext}(F) = \varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta\}$. På motsvarande sätt är $\exists X\, \phi$ sann precis om ϕ^X_F är sann för **något** sådant F.

Dessutom är $\forall u\, \phi$ och $\exists u\, \phi$ sanna om motsvarande ϕ^u_f är sann för alla respektive någon funktion f från D^n till D, där n är ställigheten för funktionsvariabeln u.

Den ovan kortfattat beskrivna semantiken gäller den så kallade **standardvarianten** av andra ordningens logik. Det finns också alternativ, där det ingår i tolkningen vilka predikat respektive funktioner F och f ovan kan vara, dvs predikat och funktioner får egna domäner. Detta liknar mer första ordningens logik, och med en sådan tolkning blir andra ordningens logik inte starkare än första ordningens. I fortsättningen behandlar vi bara standardvarianten av andra ordningens logik.

I andra ordningens logik brukar man också tillåta predikat som är definierade på predikat av given ställighet, s.k. predikat av andra ordningen.
Med dessa kan man uttrycka sådant som
”Alla bra egenskaper som någon krokodil har, har alla flodhästar också”,
$$\forall X\, (\mathcal{B}(X) \rightarrow (\exists x\, (Kx\ \&\ Xx) \rightarrow \forall x\, (Fx \rightarrow Xx))).$$
Här är $\mathcal{B}$ ett predikat av andra ordningen, dvs det är definierat för (enställiga) predikat.
Vi kommer här inte att behöva andra ordningens predikat.

Exempel 1:

Sentensen
$$\forall X\,\forall x\,\exists u\,\forall y\,(Xxy \leftrightarrow Ru(x)u(y))$$
är sann i tolkningen
$D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\quad$ $\mathrm{Ext}(R) = \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle\}$
ty för ett godtyckligt enställigt predikat F och individkonstant d kan vi låta funktionen f ges av
om Fdd gäller: $f(d) = a$ och övriga $f(e) = b$ om Fde gäller och $= c$ annars,
om Fdd inte gäller: $f(d) = b$ och övriga $f(e) = c$ om Fde gäller, $= a$ annars.
Då är för alla F och alla d $Fde \leftrightarrow Rf(d)f(e)$ sann för alla e (tänk efter!), så den givna sentensen är sann.

Exempel 2: en definition av likhet

I första ordningens predikatlogik var vi tvungna att införa likhetssymbolen $=$ som ett eget logiskt predikat, men i andra ordningens logik kan man **definiera** likhet. Sentensen
$$a = b \leftrightarrow \forall X\,(Xa \rightarrow Xb).$$
är nämligen logiskt giltig, dvs sann i alla tolkningar.
Om $a = b$ gäller, gäller ju också $Fa \rightarrow Fb$ för alla enställiga predikat F och därmed $\forall X\,(Xa \rightarrow Xb)$.
Om å andra sidan $\forall X\,(Xa \rightarrow Xb)$ gäller, gäller speciellt $Fa \rightarrow Fb$ där F tolkas som det enställiga predikat som gör Fx sant precis om $a = x$, så $a = b$ (Fa sant ger att Fb är sant, dvs $a = b$).
Så $a = b$ är sann i en tolkning precis om $\forall X\,(Xa \rightarrow Xb)$ är det, och den givna sentensen är sann i alla tolkningar, dvs logiskt giltig.
Man kan alltså **definiera** $a = b$ till att betyda $\forall X\,(Xa \rightarrow Xb)$.

Exempel 3: axiom för aritmetiken utan icke-standardmodeller

Om man i Peanos axiom ersätter axiomschemat P7 med ett axiom P7' (en viss sentens i andra ordningens logik), kan man få ett axiomsystem vars alla modeller (väsentligen) är $\mathbb{N}$, de naturliga talen.
Låt nämligen P7' vara sentensen
$$\forall X\,((X0\,\&\,\forall x\,(Xx \rightarrow XS(x))) \rightarrow \forall x\,Xx).$$
P7' uttrycker induktionsaxiomet, att om en egenskap gäller för 0 och vidare för $S(a)$ om den gäller för a, så gäller den för alla naturliga tal. Skillnaden mot axiomschemat P7 är att vi nu kan uttala oss om **alla** egenskaper, inte bara dem som kan uttryckas med det givna språket.
Genom att i en modell för P1–P6 och P7' låta Fa vara sann precis om någon av $a{=}0, a{=}S(0), a{=}S(S(0)), \ldots$, ser man att alla sådana modeller (väsentligen) är $\mathbb{N}$ — icke-standardmodellerna har försvunnit!
Ur detta följer:
kompakthetssatsen gäller inte i andra ordningens logik.
Om den gjorde det skulle man ju som i avsnittet om kompakthetssatsen kunna visa att det finns icke-standardmodeller till P1–P6 och P7'.
Men för att visa kompakthetssatsen behövde vi bara att det fanns ett sunt och fullständigt härledningssystem, så:
Det finns inget sunt och fullständigt härledningssystem för andra ordningens predikatlogik.
I debatten har den senare egenskapen hos andra ordningens logik setts som en

avgörande svaghet, ”man kan inte bevisa allt som gäller”. Å andra sidan uttrycker väl P7' bättre än P7 vår intuitiva uppfattning om induktionsaxiomet, vilket skulle tala för att använda andra ordningens logik i matematiken, liksom det faktum att vi i motsats till i första ordningens logik kan beskriva de naturliga talen (liksom de reella talen) entydigt med ett ändligt antal axiom.

Övningar

1. Sentensen (i första ordningens logik) $\exists x\, Fx \;\&\; \exists x \sim Fx$ är förstås satisfierbar.
Följer det att sentensen (i andra ordningens logik) $\exists X\, (\exists x\, Xx \;\&\; \exists x \sim Xx)$ är logiskt giltig?

2. Visa att sentensen $\exists X \sim \exists x\, \forall y\, (Xx \leftrightarrow Rxy)$ är logiskt giltig.

3. Vad säger sentensen

$$\forall u \sim (\forall x\, \forall y\, (u(x) = u(y) \rightarrow x = y) \;\&\; \exists x\, \forall y\, (u(y) \neq x)),$$

dvs i vilka tolkningar är den sann?

Svar till övningarna

1. Nej, det följer inte.

Att $\exists x\, Fx \,\&\, \exists x \sim Fx$ är satisfierbar betyder att det finns en tolkning, dvs en domän $\mathcal{D}$ och $\mathrm{Ext}(F) \subseteq \mathcal{D}$, som ger sentensen sanningsvärdet 1.

Att $\exists X\, (\exists x\, Xx \;\&\; \exists x \sim Xx)$ vore logiskt giltig skulle betyda att den hade sanningsvärdet 1 i alla tolkningar, dvs för **alla** $\mathcal{D}$ skulle man kunna finna en $\mathrm{Ext}(F) \subseteq \mathcal{D}$ som gåve den första sentensen sanningsvärdet 1. Om $\mathcal{D} = \{\alpha\}$ kan man inte det, $\exists X\, (\exists x\, Xx \,\&\, \exists x \sim Xx)$ har i den tolkningen sanningsvärdet 0.

2. Att sentensen $\exists X \sim \exists x\, \forall y\, (Xx \leftrightarrow Rxy)$ är logiskt giltig betyder precis att för varje tolkning (dvs för varje val av domän $\mathcal{D}$ och $\mathrm{Ext}(R) \subseteq \mathcal{D}^2$) finns $\mathrm{Ext}(F) \subseteq \mathcal{D}$ så att $\sim \exists x\, \forall y\, (Fx \leftrightarrow Rxy)$ har sanningsvärdet 1, dvs så att $\forall x\, \exists y\, \sim (Fx \leftrightarrow Rxy)$ har sanningsvärdet 1.

Välj, för givet $\mathrm{Ext}(R)$, $\mathrm{Ext}(F) = \{x \in \mathcal{D} \mid \langle x, x\rangle \notin \mathrm{Ext}(R)\}$, dvs så att $\forall x\, \sim (Fx \leftrightarrow Rxx)$ är sann. Den önskade $\forall x\, \exists y\, \sim (Fx \leftrightarrow Rxy)$ blir då sann (för varje x, välj $y = x$) och saken är klar.

3. Sentensen $\forall u \sim (\forall x\, \forall y\, (u(x) = u(y) \rightarrow x = y) \,\&\, \exists x\, \forall y\, (u(y) \neq x))$ är sann precis om det inte finns någon funktion $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ som är en-entydig (dvs olika element avbildas på olika) men inte på (dvs inte alla element är bilder av något).

Om $\mathcal{D}$ är ändlig är sentensen sann, ty varje en-entydig funktion på en ändlig mängd är på (om inga olika element avbildas på samma, måste elementen som är bilder av något vara lika många som elementen i mängden, dvs alla element måste vara bilder.)

Om å andra sidan $\mathcal{D}$ är oändlig, kan vi ta en oändlig följd $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathcal{D}$ och låta f ges av $f(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$ och $f(\beta) = \beta$ för övriga $\beta \in \mathcal{D}$. Den funktionen är en-entydig, men inte på, så sentensen är falsk om $\mathcal{D}$ är oändlig.

Sentensen ”säger” alltså precis att domänen är ändlig. Enligt K2 följer ur kompakthetssatsen att det inte finns någon sentens i *första* ordningens predikatlogik som säger det.