Några lösta uppgifter ur kapitel 6

6.1.6

Eftersom $F(x)$ alltid är sann är $H(x) \vee I(x) \rightarrow F(x)$ alltid sann. Saken är klar.

6.1.10

$\exists x I(x)$ är sann (med $x = \gamma$). $\forall x(J(x) \rightarrow I(x))$ är falsk ($x = \alpha$ förstör). Sentensen är falsk.

6.2.1

$\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \not\models \forall x(G(x) \rightarrow F(x))$

$U = \{\alpha\},\ F(\alpha) = 0,\ G(\alpha) = 1.$

6.2.8

$\forall x F(x) \rightarrow \exists x G(x) \not\models \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

$U = \{\alpha, \beta\},\ F(\alpha) = 1,\ F(\beta) = 0,\ G(\alpha) = G(\beta) = 1.$

6.2.11

$\exists {\sim} F(x) \not\models {\sim}\exists F(x)$

$U = \{\alpha\},\ F(\alpha) = 0,\ F(\beta) = 1$

6.2.16

$\forall x F(x) \leftrightarrow A \not\models \forall x(F(x) \leftrightarrow A)$

$U = \{\alpha, \beta\},\ F(\alpha) = 1,\ F(\beta) = 0,\ A$ är falsk.

6.2.17

$\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x) \not\models F(a) \rightarrow \forall x G(x)$

$U = \{\alpha, \beta\},\ F(\alpha) = 1,\ F(\beta) = 0,\ G(\alpha) = G(\beta) = 0,\ a$ refererar till α.

6.2.19

$\forall x F(x) \leftrightarrow \forall x G(x) \not\models \exists(F(x) \leftrightarrow G(x))$

$U = \{\alpha, \beta\},\ F(\alpha) = 1,\ F(\beta) = 0,\ G(\alpha) = 0,\ G(\beta) = 1$

6.2.22

${\sim}\exists x F(x) \vee {\sim}\exists G(x) \not\models {\sim}\exists x(F(x) \vee G(x))$

$U = \{\alpha\},\ F(\alpha) = 0,\ G(\alpha) = 1$

6.2.24

$\forall x \exists y(F(y) \rightarrow G(x)) \not\models \forall x \exists y(G(y) \rightarrow F(x))$

$U = \{\alpha\},\ F(\alpha) = 0,\ G(\alpha) = 1$

6.3.I.1

Visa $\forall x F(x) \,\&\, \forall x G(x) \dashv\vdash \forall x(F(x) \,\&\, G(x))$

1	(1)	$\forall x F(x) \,\&\, \forall x G(x)$	*Premiss*
1	(2)	$\forall x F(x)$	1 &E
1	(3)	$\forall x G(x)$	1 &E
1	(4)	$F(a)$	2 $\forall$E
1	(5)	$G(a)$	3 $\forall$E
1	(6)	$F(A) \,\&\, G(a)$	4,5 &I
1	(7)	$\forall x(F(x) \,\&\, G(x))$	6 $\forall$I

1	(1)	$\forall x(F(x) \,\&\, G(x))$	*Premiss*
1	(2)	$F(a) \,\&\, G(a)$	1 $\forall$E
1	(3)	$F(a)$	2 &E
1	(4)	$G(a)$	3 &E
1	(5)	$\forall x F(x)$	3 $\forall$I
1	(6)	$\forall x G(x)$	4 $\forall$I
1	(7)	$\forall x F(x) \,\&\, \forall x G(x)$	5,6 &I

6.3.I.5

Visa $\sim\exists x F(x) \vdash \forall x{\sim}F(x)$

Bevisskiss Antag att det godtyckliga elementet a har egenskap F. Men då finns det ju något som har egenskap F, vilket är en motsägelse. Ett godtyckligt element kan alltså inte ha egenskap F, och detta resonemang gäller *alla* element.

1	(1)	$\sim\exists x F(x)$	*Premiss*
2	(2)	$F(a)$	*Antagande*
2	(3)	$\exists x F(x)$	2 $\exists$I
1, 2	(4)	⅄	1,3 $\sim$E
1	(5)	$\sim F(a)$	2,4 $\sim$I
1	(6)	$\forall x{\sim}F(x)$	5 $\forall$I

Notera att rad 5 inte beror av (det avslutade) antagandet på rad 2, utan bara av premissen på rad 1, och premissen innehåller inte namnet ”a”. Vi hade med precis samma beräkning kunnat komma till $\sim F(b)$, $\sim F(c)$, osv. Eftersom namnvalet inte spelar någon roll kan vi dra slutsatsen att detta måste gälla för alla element.

6.3.I.11

$\forall x \forall y\big(F(x) \to G(y)\big) \vdash \forall x\big(F(x) \to \forall y G(y)\big)$

Anm Premissen säger i praktiken: ”om vi betraktar ett godtyckligt par, så om den ena i paret har egenskap F så har den andra egenskap G”. I såna fall bör väl gälla att om en sak har egenskap F så måste allt ha egenskap G, eftersom den förstnämnda kan paras ihop med alla element i universum.

Bevisskiss Kommer inte på någon.

1	(1)	$\forall x \forall y (F(x) \to G(y))$	*Premiss*
1	(2)	$\forall y (F(a) \to G(y))$	1 $\forall$ E
3	(3)	$F(a)$	*Antagande*
2	(4)	$F(a) \to G(b)$	2 $\forall$ E
1, 3	(5)	$G(b)$	3,4 $\to$E
1, 3	(6)	$\forall y G(y)$	5 $\forall$ I
1	(7)	$F(a) \to \forall y G(y)$	3,6 $\to$I
1	(8)	$\forall x (F(x) \to \forall y G(y))$	7 $\forall$ I

6.3.II.1

$E(x)$: x är elefant.

$L(x)$: x är stor

Visa att $\sim L(Jumbo)$, $\forall x(E(x) \to L(x) \vdash \sim E(Jumbo)$.

1	(1)	$\forall x(E(x) \to L(x))$	*Premiss*
2	(2)	$\sim L(Jumbo)$	*Premiss*
3	(3)	$E(Jumbo)$	*Antagande*
1	(4)	$E(Jumbo) \to L(Jumbo)$	1 $\forall$ E
1, 3	(5)	$L(Jumbo)$	3,4 $\to$E
1, 2, 3	(6)	$\curlywedge$	2,5 $\sim$E
1, 2	(7)	$\sim E(Jumbo)$	3,6 $\to$I

6.4.I.3

Visa $\exists x(F(x) \,\&\, \sim G(x))$, $\forall x(H(x) \to G(x)) \vdash \exists x(F(x) \,\&\, \sim H(X))$

1	(1)	$\exists x(F(x) \,\&\, \sim G(x))$	*Premiss*
2	(2)	$\forall x(H(x) \to G(x))$	*Premiss*
3	(3)	$F(a) \,\&\, \sim G(a)$	*Antagande*
3	(4)	$F(a)$	3 &E
3	(5)	$\sim G(a)$	3 &E
6	(6)	$H(a)$	*Antagande*
2	(7)	$H(a) \to G(a)$	2 $\forall$ E
2, 6	(8)	$G(a)$	6,7 $\to$E
2, 3, 6	(9)	$\curlywedge$	5,8 $\sim$E
2, 3	(10)	$\sim H(a)$	6,9 $\sim$I
2, 3	(11)	$F(a) \,\&\, \sim H(a)$	4,10 &I
2, 3	(12)	$\exists x(F(x) \,\&\, \sim H(x))$	11 $\exists$ I
1, 2	(13)	$\exists x(F(x) \,\&\, \sim H(x))$	1,3,12 $\exists$ E

6.4.I.6

Visa $\exists x(F(x) \,\&\, \sim G(x)) \vdash \sim \forall x(F(x) \to G(x))$

Bevisskiss Kalla den där som är F men inte G för a. Om allting som är F också är G skulle ju a (som är F) också vara G, och det går ju inte!

1	(1)	$\exists x\big(F(x)\,\&\,{\sim}G(x)\big)$	*Premiss*
2	(2)	$F(a)\,\&\,{\sim}G(a)$	*Antagande*
3	(3)	$\forall x\big(F(x) \to G(x)\big)$	*Antagande*
3	(4)	$F(a) \to G(a)$	3 ∀E
2	(5)	$F(a)$	2 &E
2, 3	(6)	$G(a)$	4,5 →E
2	(7)	${\sim}G(a)$	2 &E
2, 3	(8)	⅄	6,7 ∼E
2	(9)	${\sim}\forall x\big(F(x) \to G(x)\big)$	3,8 ∼I
1	(10)	${\sim}\forall x\big(F(x) \to G(x)\big)$	1,2,9 ∃E

Notera att slutsatsen på rad 9 inte beror av namnvalet på rad 2 (vi skulle fått samma resultat även om vi valt namnet ”persson” istället). Därför får vi göra en existens-elimination (slutsatsen beror bara av att det finns ett element med den givna egenskapen, inte av vilket detta element är).

6.4.I.14

Visa $\forall x(F(x) \to \forall y G(y)),\ \forall x({\sim}F(x) \to \exists y G(y)) \vdash \exists z G(z)$

1	(1)	$\forall x(F(x) \to \forall y G(y))$	*Premiss*
2	(2)	$\forall x({\sim}F(x) \to \exists y G(y))$	*Premiss*
3	(3)	${\sim}\exists z G(z)$	*Antagande*
4	(4)	$F(a)$	*Antagande*
1	(5)	$F(a) \to \forall y G(y)$	1 ∀E
1, 4	(6)	$\forall y G(y)$	4,5 →E
1, 4	(7)	$G(b)$	6 ∀E
1, 4	(8)	$\exists z G(z)$	7 ∃I
1, 3, 4	(9)	⅄	3,8 ∼E
1, 3	(10)	${\sim}F(a)$	4,9 ∼I
1, 2, 3	(11)	${\sim}F(a) \to \exists y G(y)$	2 ∀E
1, 2, 3	(12)	$\exists y G(y)$	10,11 →E
1, 2, 3	(13)	⅄	3,12 ∼E
1, 2	(14)	${\sim}{\sim}\exists z G(z)$	3,13 ∼I
1, 2	(15)	$\exists G(z)$	14 DN

6.4.I.21

Visa $\exists x \forall y\big(F(y) \to G(x)\big) \vdash \forall x \exists y\big(F(x) \to G(y)\big)$

Bevisskiss Anta att det där x som omtalas i premissen heter a. Anta vidare att slutsatsen inte gäller. Då måste det finnas något element (kalla det b) sånt att ${\sim}\exists y\big(F(b) \to G(y)\big)$. Men premissen gäller alla element, däribland också för b, och påstår alltså $F(b) \to G(a)$. Men då finns det ju något värde på y (värdet a) som gör antagandet falskt!

1	(1)	$\exists x \forall y\big(F(y) \to G(x)\big)$	*Premiss*	
2	(2)	$\forall y\big(F(y) \to G(a)\big)$	*Antagande*	Vi sätter $x := a$ i premissen
3	(3)	$\sim\exists y\big(F(b) \to G(y)\big)$	*Antagande*	
2	(4)	$\big(F(b) \to G(a)\big)$	2 $\forall$E	$y := b$
2	(5)	$\exists y\big(F(b) \to G(y)\big)$	4 $\exists$I	$a := y$
$2,3$	(6)	$\curlywedge$	3,5 $\sim$E	
2	(7)	$\sim\sim\exists y\big(F(b) \to G(y)\big)$	3,6 $\sim$I	
2	(8)	$\exists y\big(F(b) \to G(y)\big)$	7 DN	
2	(9)	$\forall x \exists y\big(F(x) \to G(y)\big)$	8 $\forall$I	$b := x$
1	(10)	$\forall x \exists y\big(F(x) \to G(y)\big)$	1,2,9 $\exists$E	

6.4.II.3

Visa $\forall x\big(A \vee F(x)\big) \dashv\vdash A \vee \forall x F(x)$

Bevisskiss 1 A måste vara antingen sann eller falsk. Är den sann, ja då blir slutsatsen sann. Är den falsk kräver premissen att högerdelen av disjunktionen ska vara sann. Och då blir slutsatsen också sann. "$A \vee \sim A$" bevisar man genom motsägelse. Vi börjar med att anta motsatsen till det vi vill ha, och därefter antar vi något värde på A, och så ser vi vad som händer.

1	(1)	$\forall x\big(A \vee F(x)\big)$	*Premiss*
2	(2)	$\sim\big(A \vee \forall x F(x)\big)$	*Antagande*
3	(3)	A	*Antagande*
3	(4)	$A \vee \forall x F(x)$	3 $\vee$I
$2,3$	(5)	$\curlywedge$	2,4 $\sim$E
2	(6)	$\sim A$	3,5 $\sim$I
1	(7)	$A \vee F(a)$	1 $\forall$E
8	(8)	A	*Antagande*
9	(9)	$\sim F(a)$	*Antagande*
$2,8$	(10)	$\curlywedge$	6,8 $\sim$E
$2,8$	(11)	$\sim\sim F(a)$	9,10 $\sim$I
$2,8$	(12)	$F(a)$	11 DN
13	(13)	$F(a)$	*Antagande*
$1,2$	(14)	$F(a)$	7,8,12,13,13 $\vee$E
$1,2$	(15)	$\forall x F(x)$	14 $\forall$I
$1,2$	(16)	$A \vee \forall x F(x)$	15 $\vee$I
$1,2$	(17)	$\curlywedge$	2,16 $\sim$E
1	(18)	$\sim\sim\big(A \vee \forall x F(x)\big)$	17 $\sim$I
1	(19)	$A \vee \forall x F(x)$	18 DN

Bevisskiss 2 Får inte plats.

1	(1)	$A \vee \forall x F(x)$	*Premiss*
2	(2)	A	*Antagande*
2	(3)	$A \vee F(a)$	2 $\vee$I
2	(4)	$\forall x\big(A \vee F(x)\big)$	3 $\forall$I
5	(5)	$\forall x F(x)$	*Antagande*
5	(6)	$F(a)$	5 $\forall$E
5	(7)	$A \vee F(a)$	6 $\vee$I
5	(8)	$\forall x\big(A \vee F(x)\big)$	7 $\forall$I
1	(9)	$\forall x\big(A \vee F(x)\big)$	1,2,4,5,8 $\vee$E

6.4.I.18

$\forall x \exists y (F(x) \to G(y)), \forall x \exists y (\sim F(x) \to G(y)) \vdash \exists z G(z)$

Bevisskiss Betrakta ett godtyckligt element a. Antingen gäller $F(a)$, och då ger första premissen att det finns något som är G. Eller så gäller inte $F(a)$, och då säger andra premissen att det finns något som är G.

Om ens resonemang innehåller orden ”antingen-eller” brukar effektiv uppsläggning vara att anta motsatsen till det man vill bevisa, anta ”antingen”, få motsägelse, sluta ”eller”, få motsägelse igen, och förkasta motsatsen.

1	(1)	$\forall x \exists y (F(x) \to G(y))$	*Premiss*
2	(2)	$\forall x \exists y (\sim F(x) \to G(y))$	*Premiss*
3	(3)	$\quad \sim \exists z G(z)$	*Antagande*
4	(4)	$\quad\quad F(a)$	*Antagande*
1	(5)	$\quad\quad \exists y (F(a) \to G(y))$	1 $\forall$E
6	(6)	$\quad\quad\quad F(a) \to G(b)$	*Antagande*
4, 6	(7)	$\quad\quad\quad G(b)$	4,6 $\to$E
4, 6	(8)	$\quad\quad\quad \exists z G(z)$	7 $\exists$I
3, 4, 6	(9)	$\quad\quad\quad \curlywedge$	3,8 $\sim$E
1, 3, 4	(10)	$\quad\quad \curlywedge$	5,6,9 $\exists$E
1, 3	(11)	$\quad \sim F(a)$	4,10 $\sim$I
2	(12)	$\quad \exists y (\sim F(a) \to G(y))$	2 $\forall$E
13	(13)	$\quad\quad \sim F(a) \to G(c)$	*Antagande*
1, 3, 13	(14)	$\quad\quad G(c)$	11,13 $\to$E
1, 3, 13	(15)	$\quad\quad \exists z G(z)$	14 $\exists$I
1, 3, 13	(16)	$\quad\quad \curlywedge$	3,15 $\sim$E
1, 2, 3	(17)	$\quad \curlywedge$	12,13,16 $\exists$E
1, 2	(18)	$\sim\sim \exists z G(z)$	3,17 $\sim$I
1, 2	(19)	$\exists z G(z)$	18 DN