Institutionen för matematik
KTH
J.Kristoferson, B.Ek

Lösningar tentamen 5B1928 Logik för D och IT, 29 augusti 2005

1) Vi har påståendena:
A: ”Vi tre är alla samma sort.”
B: ”A är kung.”
C: ”A och B är inte båda kungar.”
Om A är kung är det hon säger sant, så alla tre är detsamma, alltså kungar. Men då är C:s påstående lögnaktigt. Omöjligt, så **A är narr** och de tre är inte alla samma sort. B ljuger när han säger att A är kung, så **B är också narr**. C:s påstående är alltså sant, så **C är kung**. Vi har sett att det inte finns någon annan möjlighet än ovanstående. Man verifierar att alla utsagorna stämmer i det fallet (så problemet har en lösning).
Svar: A och B är narrar och C är kung.

2) Att visa: $A \leftrightarrow \sim B \ \vdash \ \sim A \leftrightarrow B$.
Idé: Använd $\leftrightarrow$I (eller Df)

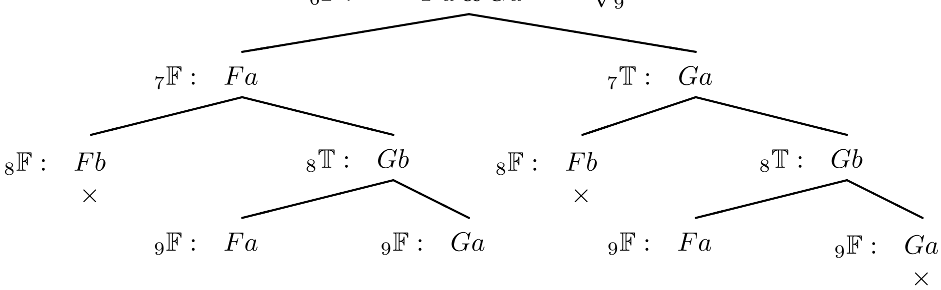
1	(1)	$A \leftrightarrow \sim B$	premiss	
2	(2)	$\sim A$	antagande	
3	(3)	$\sim B$	antagande	
1,3	(4)	A	1,3	$\leftrightarrow$E
1,2,3	(5)	$\curlywedge$	2,4	$\sim$E
1,2	(6)	$\sim\sim B$	3,5	$\sim$I
1,2	(7)	B	6	DN
8	(8)	B	antagande	
9	(9)	A	antagande	
1,9	(10)	$\sim B$	1,9	$\leftrightarrow$E
1,8,9	(11)	$\curlywedge$	10,8	$\sim$E
1,8	(12)	$\sim A$	9,11	$\sim$I
1	(13)	$\sim A \leftrightarrow B$	2,7,8,12	$\leftrightarrow$I

Slutsatsen på rad (13) beror bara av premissen på rad (1), så **härledningen är klar**.

3) För att avgöra om $\forall x\,(Fx \to Gx),\ \exists x \sim(Fx \,\&\, Gx)\ \vDash\ \sim\exists x\, Fx$
söker vi motexempel (tolkningar som gör premissen sann och slutsatsen falsk):

I tablån växlar de tre faserna:
1. Satslogiska 1; 6–9
2. $\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$ 2,3
3. $\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$ 4,5

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{T}: & \forall x\,(Fx \to Gx) & a_4, b_5 \\
\mathbb{T}: & \exists x \sim(Fx \,\&\, Gx) & \surd_{2:a} \\
\mathbb{F}: & \sim\exists x\, Fx & \surd_1 \\
{}_1\mathbb{T}: & \exists x\, Fx & \surd_{3:b} \\
{}_2\mathbb{T}: & \sim(Fa \,\&\, Ga) & \surd_6 \\
{}_3\mathbb{T}: & Fb & \\
{}_4\mathbb{T}: & Fa \to Ga & \surd_7 \\
{}_5\mathbb{T}: & Fb \to Gb & \surd_8 \\
{}_6\mathbb{F}: & Fa \,\&\, Ga & \surd_9
\end{array}
$$



Tablån sluter sig inte, **slutledningen är inte giltig.**
Ur tablån kan man läsa av motexemplen:

	F	G
α	$-$	$\pm$
β	$+$	$+$

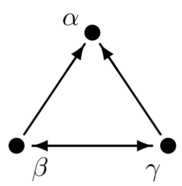
4) Att visa: $\forall x \sim(Fx \,\&\, Gx),\ \exists x\, Gx\ \vdash \sim\forall x\, Fx$.
Idé: Ga gäller för något a, enligt andra premissen. Om $\forall x\, Fx$ gällde, skulle Fa och således $Fa \,\&\, Ga$ gälla, men det motsäger första premissen. $\sim\forall x\, Fx$ gäller alltså.

1	(1)	$\forall x \sim(Fx \,\&\, Gx)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\, Gx$	premiss		
3	(3)	$\forall x\, Fx$	antagande		
4	(4)	Ga	antagande		
3	(5)	Fa	3	∀E	
3,4	(6)	$Fa \,\&\, Ga$	5,4	&I	
1	(7)	$\sim(Fa \,\&\, Ga)$	1	∀E	
1,3,4	(8)	$\curlywedge$	7,6	~E	
1,2,3	(9)	$\curlywedge$	2,4,8	∃E	[a inte i (2),(8),(1),(3)]
1,2	(10)	$\sim\forall x\, Fx$	3,9	~I	

Slutsatsen på rad (10) beror bara av premisserna på raderna (1) och (2), så **saken är klar**.

5) 1. "Alla tycker om minst två stycken och ingen kung tycker om sig själv."
dvs "För alla x finns y och z, så att y och z är olika, x tycker om y och x tycker om z. Dessutom är det inte så att det finns x så att x är kung och x tycker om x",
så **svar**: $\forall x\, \exists y\, \exists z\, (\sim y = z \,\&\, Txy \,\&\, Txz) \,\&\, \sim\exists x\, (Kx \,\&\, Txx)$
2. "Varje kung tycker om alla narrar som tycker om minst en kung."
dvs "För alla x: om x är kung så gäller för alla y att om y är narr och det finns z så att z är kung och y tycker om z, så tycker x om y"
så **svar**: $\forall x\, (Kx \rightarrow \forall y\, ((Ny \,\&\, \exists z\, (Kz \,\&\, Tyz)) \rightarrow Txy))$
Logiskt ekvivalenta varianter är förstås möjliga.

6) För att finna en minimal modell (dvs en med så få element som möjligt i D) för alla $p_1 : \exists x\, \exists y\, Rxy$, $p_2 : \forall x\, \forall y\, (x \neq y \rightarrow (Rxy \vee Ryx))$, $p_3 : \exists x\, \forall y \sim Rxy$, $p_4 : \forall x \sim Rxx$ och $p_5 : \forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow \exists z\, (y \neq z \,\&\, Rxz))$ prövar vi med 1, 2, 3 etc element.
Enligt p_3 finns ett element i D som det inte går någon pil från. Kalla det α. Enligt p_1 och p_4 finns minst ett element till, kalla ett sådant β. Enligt valet av α är Rab falsk, så enligt p_2 är Rba sann. Enligt p_5 (med $x = b, y = a$) finns $\gamma \in D, \alpha \neq \gamma$ så att Rbc är sann. $\beta \neq \gamma$ enligt p_4. Enligt valet av α och p_2 är Rac falsk och Rca sann. p_5 (med $x = c, y = a$) ger att det finns $\delta \in D, \alpha \neq \delta$ med Rcd sann. Vi måste ha $\gamma \neq \delta$ (p_4), men kan ha $\delta = \beta$. Man kan verifiera, se fig., att detta ger att alla sentenserna i mängden är sanna, så



svar: En minimal modell ges av $D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\mathrm{Ext}(R) = \{\langle\beta,\alpha\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\alpha\rangle, \langle\gamma,\beta\rangle\}$.

7) Se nästa sida!

8) En binär relation $\mathcal{R}$ som gör $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \,\&\, Rzy) \rightarrow Rzx) \,\&\, \forall x\, \exists y\, Rxy$ sann är

- **reflexiv**, dvs $\forall x\, Rxx$ är sann, ty för godtyckligt α finns β så att Rab är sann ($\forall x\, \exists y\, Rxy$ är sann) och $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \,\&\, Rzy) \rightarrow Rzx)$ ger $(Rab \,\&\, Rab) \rightarrow Raa$ (tag $x = z = a, y = b$), så Raa är sann i tolkningen
- **symmetrisk**, dvs $\forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow Ryx)$ är sann, ty om Rab är sann är $Rab \,\&\, Rbb$ det också (p.g.a. reflexiviteten) och $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \,\&\, Rzy) \rightarrow Rzx)$ ger $(Rab \,\&\, Rbb) \rightarrow Rba$ (tag $x = a, y = z = b$), så Rba är sann i tolkningen, således $Rab \rightarrow Rba$
- **transitiv**, dvs $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \,\&\, Ryz) \rightarrow Rxz)$ är sann, vilket följer ur $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \,\&\, Rzy) \rightarrow Rzx)$ och symmetrin

Svar: $\mathcal{R}$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv (så en ekvivalensrelation).

9) Vi har: $\alpha)$ $p \vDash r$ eller $q \vDash r$ (eller båda) $\beta)$ $p \vee q\ \vDash\ r$.
Om p och r är A och q är B gäller $p \vDash r$ och alltså $\alpha)$, men inte $\beta)$ (en tolkning som gör A falsk och B sann gör $p \vee q$ sann och r falsk).
Om $\beta)$ är sann gäller i varje tolkning som gör p sann att $p \vee q$ är sann och alltså r sann, så $p \vDash r$ och $\alpha)$ är sann.
Så **svar:** $\alpha) \not\Rightarrow \beta)$, $\beta) \Rightarrow \alpha)$**.** (Man kan se att $\beta) \Leftrightarrow (p \vDash r$ **och** $q \vDash r)$.)

7) Att visa: $\forall x\,\forall y\,((Fx\,\&\,{\sim}Fy)\rightarrow x=y)\ \vdash\ \forall x\,Fx\vee\forall x\,{\sim}Fx$.

Idé: Om Fa och ${\sim}Fb$ båda gällde skulle enligt premissen $a=b$ gälla och då Fb, motsägelse. Alltså gäller bara endera och slutsatsen följer. Eftersom vi skall visa en disjunktion, antar vi motsatsen och gör ett indirekt bevis.

1	(1)	$\forall x\,\forall y\,((Fx\,\&\,{\sim}Fy)\rightarrow x=y)$	premiss		
2	(2)	${\sim}(\forall x\,Fx\vee\forall x\,{\sim}Fx)$	antagande		
3	(3)	Fa	antagande		
4	(4)	${\sim}Fb$	antagande		
1	(5)	$\forall y\,((Fa\,\&\,{\sim}Fy)\rightarrow a=y)$	1	$\forall$E	
1	(6)	$(Fa\,\&\,{\sim}Fb)\rightarrow a=b$	5	$\forall$E	
3,4	(7)	$Fa\,\&\,{\sim}Fb$	3,4	&I	
1,3,4	(8)	$a=b$	6,7	$\rightarrow$E	
1,3,4	(9)	Fb	8,3	=E	
1,3,4	(10)	$\curlywedge$	4,9	${\sim}$E	
1,3	(11)	${\sim}{\sim}Fb$	4,10	${\sim}$I	
1,3	(12)	Fb	11	DN	
1,3	(13)	$\forall x\,Fx$	12	$\forall$I	[b inte i (1),(3)]
1,3	(14)	$\forall x\,Fx\vee\forall x\,{\sim}Fx$	13	$\vee$I	
1,2,3	(15)	$\curlywedge$	2,14	${\sim}$E	
1,2	(16)	${\sim}Fa$	3,15	${\sim}$I	
1,2	(17)	$\forall x\,{\sim}Fx$	16	$\forall$I	[a inte i (1),(2)]
1,2	(18)	$\forall x\,Fx\vee\forall x\,{\sim}Fx$	17	$\vee$I	
1,2	(19)	$\curlywedge$	2,18	${\sim}$E	
1	(20)	${\sim}{\sim}(\forall x\,Fx\vee\forall x\,{\sim}Fx)$	2,19	${\sim}$I	
1	(21)	$\forall x\,Fx\vee\forall x\,{\sim}Fx$	20	DN	

Slutsatsen på rad (21) beror bara av premissen på rad (1), så **saken är klar**.

8) och **9)** Se förra sidan!

10) Låt ϕz vara formeln $(a*b)*z=a*(b*z)$. Vi skall först visa $\forall z\,\phi z$.

$\phi 0$ gäller eftersom $(a*b)*0\overset{\text{P5}}{=}0$ och $a*(b*0)\overset{\text{P5}}{=}a*0\overset{\text{P5}}{=}0$.

Antag att ϕc gäller, dvs $(a*b)*c=a*(b*c)$. Då fås $(a*b)*S(c)\overset{\text{P6}}{=}((a*b)*c)+(a*b)\overset{\phi c}{=}(a*(b*c))+(a*b)\overset{\text{givet}}{=}a*((b*c)+b)\overset{\text{P6}}{=}a*(b*S(c))$, dvs $\phi S(c)$.

Därmed gäller $\phi c\rightarrow\phi S(c)$ för alla c, så $\forall z\,(\phi z\rightarrow\phi S(z))$.

Så $\phi 0\ \&\ \forall z\,(\phi z\rightarrow\phi S(z))$ gäller och enligt axiom P7 (alfabetiska varianten med z i stället för x) gäller då $\forall z\,\phi z$, dvs $\forall z\,(a*b)*z=a*(b*z)$. Eftersom detta gäller för godtyckliga a,b, fås $(2\times\forall\text{I})$ att **det önskade** $\forall x\forall y\forall z\,(x*y)*z=x*(y*z)$ **är visat**.

11) Vi skall visa att $\Box\,(A\rightarrow B),\ \Box B\rightarrow{\sim}A\ \vdash_{S5}\ \Diamond{\sim}A$.

Idé: Om ${\sim}A$ gäller i någon värld fås slutsatsen. Annars gäller A och enligt första premissen B i alla världar, så $\Box B$ och enligt andra premissen ${\sim}A$ (i den verkliga världen). Slutsatsen fås igen. Eftersom vi gjorde ett tvåfallsresonemang använder vi ett indirekt bevis.

1	(1)	$\Box\,(A\rightarrow B)$	premiss		
2	(2)	$\Box B\rightarrow{\sim}A$	premiss		
3	(3)	${\sim}\Diamond{\sim}A$	antagande		
4	(4)	${\sim}A$	antagande		
4	(5)	$\Diamond{\sim}A$	4	$\Diamond$I	
3,4	(6)	$\curlywedge$	3,5	${\sim}$E	
3	(7)	${\sim}{\sim}A$	4,6	${\sim}$I	
3	(8)	A	7	DN	
1	(9)	$A\rightarrow B$	1	$\Box$E	
1,3	(10)	B	9,8	$\rightarrow$E	
1,3	(11)	$\Box B$	10	$\Box$I	[(1),(3) fullt modaliserade]
1,2,3	(12)	${\sim}A$	2,11	$\rightarrow$E	
1,2,3	(13)	$\Diamond{\sim}A$	12	$\Diamond$I	
1,2,3	(14)	$\curlywedge$	3,13	${\sim}$E	
1,2	(15)	${\sim}{\sim}\Diamond{\sim}A$	3,14	${\sim}$I	
1,2	(16)	$\Diamond{\sim}A$	15	DN	

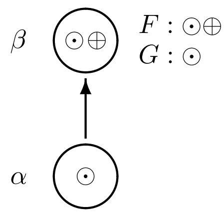
Eftersom slutsatsen på sista raden bara beror av premisserna på raderna (1) och (2), är **härledningen klar**.

12) Vi skall visa att $\forall x\,\Box\,Fx,\ \Box\,\exists x\,(Fx\to Gx),\ \Diamond\,\forall x\,Gx,\ \exists x\!\sim\! Gx\ \nvDash_{S5}\ \Box\,\exists x\,Gx$.
Vi söker alltså en tolkning som gör premisserna sanna och den högra sentensen falsk.
$\Box\,\exists x\,(Fx\to Gx)$, $\forall x\,\Box\,Fx$ och $\exists x\sim Gx$ sanna ger $\alpha,\beta\in w^*(D)$, $\alpha\neq\beta$, med $w^*[Fa]=w^*[Fb]=w^*[Fa\to Ga]=w^*[Ga]=1$, $w^*[Gb]=w^*[Fb\to Gb]=0$.
$\Box\,\exists x\,(Fx\to Gx)$ sann ger att varje värld har minst ett element, ett som gör $Fx\to Gx$ sann.
$\Diamond\,\forall x\,Gx$ ger en värld, u säg, med $u[\forall x\,Gx]=1$, så $u\neq w^*$.
$\Box\,\exists x\,Gx$ falsk ger att det finns en värld, v säg, med $v[\exists x\,Gx]=0$, tydligen $v\neq w^*,u$.
Tolkning: $\mathcal{W}=\{w^*,u,v\}$, $D=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $w^*(D)=\{\alpha,\beta\}$, $u(D)=\{\alpha\}$, $v(D)=\{\gamma\}$,
$w^*[F]=\{\alpha,\beta\}=u[F]=v[F]$, $\quad w^*[G]=\{\alpha\}=u[G]$, $v[G]=\varnothing$.
Den **visar att** $\forall x\,\Box\,Fx,\ \Box\,\exists x\,(Fx\to Gx),\ \Diamond\,\forall x\,Gx,\ \exists x\!\sim\! Gx\ \nvDash_{S5}\ \Box\,\exists x\,Gx$ **ty:**

- $\forall x\,\Box\,Fx$ är **sann**, ty $w^*[\forall x\,\Box\,Fx]=1$, ty $w^*[\Box\,Fa]=w^*[\Box\,Fb]=1$, ty $w^*[Fa]=u[Fa]=v[Fa]=w^*[Fb]=u[Fa]=v[Fa]=1$, ty $w^*[F]=u[F]=v[F]=\{\alpha,\beta\}$
- $\Box\,\exists x\,(Fx\to Gx)$ är **sann**, ty $w^*[\Box\,\exists x\,(Fx\to Gx)]=1$, ty $w^*[Fa\to Ga]=u[Fa\to Ga]=v[Fc\to Gc]=1$, ty $w^*[Ga]=u[Ga]=1, v[Fc]=0$
- $\Diamond\,\forall x\,Gx$ är **sann**, ty $w^*[\Diamond\,\forall x\,Gx]=1$, ty $u[\forall x\,Gx]=1$, ty $u[Ga]=1$
- $\exists x\!\sim\! Gx$ är **sann**, ty $w^*[\exists x\!\sim\! Gx]=1$, ty $w^*[\sim\! Gb]=1$, ty $w^*[Gb]=0$
- $\Box\,\exists x\,Gx$ är **falsk**, ty $w^*[\Box\,\exists x\,Gx]=0$, ty $v[\exists x\,Gx]=0$, ty $v[G]=\varnothing$

13) Vi skall visa att $\sim\sim(A\,\&\,B)\ \vDash_I\ \sim\sim A\,\&\sim\sim B$.
Låt som vanligt S vara mängden av informationstillstånd, med rot α och ordning $\leq$, i en intuitionistisk tolkning.
Antag att $\alpha\Vdash\ \sim\sim(A\,\&\,B)$ och $\sigma\Vdash\ \sim A$ för något $\sigma\in S$. Då gäller $\tau\nVdash A$, så $\tau\nVdash A\,\&\,B$, för alla $\tau\in S$ med $\sigma\leq\tau$, så $\sigma\Vdash\ \sim(A\,\&\,B)$, vilket motsäger att $\alpha\Vdash\ \sim\sim(A\,\&\,B)$. Ett sådant σ finns alltså inte, så $\alpha\Vdash\ \sim\sim A$. P.s.s. visas att $\alpha\Vdash\ \sim\sim B$, alltså $\alpha\Vdash\ \sim\sim A\,\&\sim\sim B$.
Således $\sim\sim(A\,\&\,B)\ \vDash_I\ \sim\sim A\,\&\sim\sim B$ och **svaret: ja, det gäller.**
Alternativt kan man visa att $\sim\sim(A\ \&\ B)\vdash_{NJ}\sim\sim A\ \&\ \sim\sim B$ och åberopa att NJ är ett sunt härledningssystem för intuitionistisk logik **eller** använda satsen mitt på sidan 341 i boken för att få $\sim\sim(A\,\&\,B)\ \vDash_I\ \sim\sim A$ och $\sim\sim(A\,\&\,B)\ \vDash_I\ \sim\sim B$ och därur det önskade.

14) Vi skall visa att $\sim\forall x\,(Fx\to Gx)\ \nvDash_I\ \exists x\sim Gx$ genom att finna en tolkning så att $\alpha\Vdash\ \sim\forall x\,(Fx\to Gx)$ och $\alpha\nVdash\exists x\sim Gx$.
Betrakta tolkningen (se fig.) $S=\{\alpha,\beta\}$, $\leqslant=\{\langle\alpha,\beta\rangle\}$,
$dom(\alpha)=\{\odot\}$, $dom(\beta)=\{\odot,\oplus\}$,
$warr(\alpha)=\varnothing$, $warr(\beta)=\{\langle\text{‘}F\text{’},\odot\rangle,\langle\text{‘}G\text{’},\odot\rangle,\langle\text{‘}F\text{’},\oplus\rangle\}$.
Den ger:



- $\alpha\Vdash\ \sim\forall x\,(Fx\to Gx)$, ty $\alpha,\beta\nVdash\forall x\,(Fx\to Gx)$, ty $\beta\Vdash F\oplus$, $\beta\nVdash G\oplus$ och $\oplus\in dom(\beta)$
- $\alpha\nVdash\exists x\sim Gx$, ty $\alpha\nVdash\ \sim G\odot$ (ty $\beta\Vdash G\odot$) och $dom(\alpha)=\{\odot\}$

Så **saken är klar**.

15) Låt $\sim\Delta=\{\sim p\mid p\in\Delta\}$. Villkoret att varje modell för Γ satisfierar minst en sentens i Δ betyder precis att mängden $\Gamma\cup\sim\Delta$ saknar modeller.
Enligt kompakthetssatsen finns en ändlig delmängd till den som också saknar modeller. Denna ändliga mängd är $\Gamma'\cup\sim\Delta'$ med $\Gamma'\subseteq\Gamma$ och $\Delta'\subseteq\Delta$ ändliga. Att den saknar modeller betyder precis att varje modell för Γ' satisfierar minst en sentens i Δ'.
Saken är klar.

16) Den givna sentensen $\exists u\,\forall x\,((Px\leftrightarrow\sim(Pu(x)\vee Pu(u(x))))\ \&\ x=u(u(u(x))))$ är sann i en tolkning precis om $\forall x\,((Px\leftrightarrow\sim(Pf(x)\vee Pf(f(x))))\ \&\ x=f(f(f(x))))$ (en sentens i första ordningens logik) är sann för någon tolkning av funktionssymbolen f.
Speciellt skall $\forall x\,x=f(f(f(x)))$ vara sann, så varje element $\alpha\in D$ avbildas av $\mathrm{Ref}(f):D\to D$ enligt $\alpha\mapsto\beta\mapsto\gamma\mapsto\alpha$, där antingen $\alpha=\beta=\gamma$ eller α,β,γ alla är olika.
Eftersom även $\forall x\,(Px\leftrightarrow\sim(Pf(x)\vee Pf(f(x))))$ skall vara sann gäller att om $\alpha\in\mathrm{Ext}(P)$ så $\beta,\gamma\notin\mathrm{Ext}(P)$ och om $\alpha\notin\mathrm{Ext}(P)$ så minst endera av $\beta\in\mathrm{Ext}(P)$ och $\gamma\in\mathrm{Ext}(P)$. Det följer att α,β,γ måste vara olika och att precis en av dem ligger i $\mathrm{Ext}(P)$. Således är D indelad i ”trippler” av element som avbildas på varandra cykliskt, där precis ett av de tre ligger i $|\,\mathrm{Ext}(P)|$. Det måste alltså gälla att $|D\setminus\mathrm{Ext}(P)|=2\cdot|\,\mathrm{Ext}(P)|$ och omvänt ser man att om det gäller, går det alltid att finna en funktion $\mathrm{Ref}(f)$ med den önskade egenskapen, så **svar: De tolkningar för vilka** $|D\setminus\mathrm{Ext}(P)|=2\cdot|\,\mathrm{Ext}(P)|$.
(Villkoret kan ekvivalent formuleras $|D|=3\cdot|\,\mathrm{Ext}(P)|$, men med den givna formuleringen stämmer det också för oändliga D (då det ekvivalent kan skrivas $|\,\mathrm{Ext}(P)|=|D\setminus\mathrm{Ext}(P)|$).)