KTH Matematik
J.Kristoferson, B.Ek

Tentamen i 5B1928, LOGIK för D och IT
Måndagen den 16 januari 2006

Skrivtid: 14.00 – 19.00.

Examinatorer: Jan Kristoferson (IT), tel 7907287, och Bengt Ek (D), tel 7906951.
Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

För godkänt krävs 13 poäng på del A. Uppgifterna ger maximalt 2 poäng var. Kontrollskrivningar från högst en av vårterminen och höstterminen 2005 kan tillgodoräknas. Den som klarat kontrollskrivning nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och skall inte göra dem).
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du klarat.

Del A

1) På Knarrön (där ju var och en är precis endera av kung (och alltid talar sanning) och narr (och alltid ljuger)) träffar vi de tre öborna A, B och C.
A säger: ”Minst en av C och mig är kung.”
B säger: ”A och C är olika sorter.” C säger: ”A är kung.”
Vad kan man säkert säga om A:s, B:s och C:s grupptillhörigheter?

2) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas)

$$A \vee C,\ (A \,\&\, B) \rightarrow C \ \vdash {\sim} C \rightarrow {\sim} B.$$

3) Visa att

$$Fa \rightarrow \forall x\, Gx \ \nvDash\ \exists x\, Fx \rightarrow \exists x\, Gx.$$

4) Använd tablåmetoden för att avgöra om

$$\forall x\, (Fx \rightarrow \forall y\, Gy) \ \vDash\ \forall x\, (Fa \rightarrow Gx).$$

Om det inte gäller, använd tablån för att finna ett motexempel.

5) Översätt följande till predikatlogiska sentenser:
1. ”Varje pojke litar på någon annan pojke.”
2. ”Det finns en flicka som litar på precis dem som litar på någon pojke.”
Använd följande lexikon. Fx : ”Ref(x) är flicka”, Px : ”Ref(x) är pojke”, Lxy : ”Ref(x) litar på Ref(y)”.

6) Visa att

$$\forall x \forall y\, ((Pxy \,\&\, Pyx) \rightarrow x = y),\ \forall x \exists y\, Pxy,\ \exists x \forall y\, Pxy \ \nvDash\ \forall x\, Pxx \vee \forall x {\sim} Pxx.$$

7) Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\exists x\, Fx,\ \exists x\, (Fx \rightarrow Gx),\ \forall x\, {\sim} Gx \ \vdash\ \exists x \exists y\, x \neq y.$$

Vänd!

8) Vilka av egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet måste (den binära relationen $\mathcal{R}$, tolkningen av) R ha, i en tolkning som gör

$$\forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow (Ryx \,\&\, Ryy)) \,\&\, \forall x\, \exists y\, Rxy$$

sann? Lösningen får vara informell, men den skall vara klar och väl motiverad och det skall framgå vad var och en av de tre egenskaperna innebär.

9) Betrakta följande påståenden om sentenserna p och q.
$\alpha) : {\sim}p \nvDash q$ (dvs q är inte en logisk följd av ${\sim}p$)
$\beta) : \nvDash p$ och $\nvDash q$ (dvs varken p eller q är logiskt giltig)
Gäller $\alpha) \Rightarrow \beta)$? (Dvs gäller för alla sentenser p, q att om $\alpha)$ är sann så är också $\beta)$ sann?) Gäller $\beta) \Rightarrow \alpha)$? Motivera ordentligt.

10) Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\, S(0) * x = x$.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.

Del B

Denna del ger, om del A är godkänd, betyg fyra för 4-7 poäng och betyg fem för 8-12 poäng. Uppgifterna kan ge 2 poäng var.
Uppgifterna är troligen inte ordnade efter svårighet.
Var noga med att motivera dina svar!

11) Visa med naturlig deduktion i varianten S5 av modallogik (dvs den modallogik som presenteras i kursboken) att

$$\Diamond A \rightarrow \Box A \ \vdash_{S5} {\sim}A \rightarrow \Box {\sim}A.$$

Formelbladets SI-regler får användas (men t.ex. ”MS-regler” bara om de bevisas).

12) Visa att i modal predikatlogik (fortfarande variant S5)

$$\Box \forall x\, \forall y\, Pxy \ \nvDash_{S5} \ \Diamond \forall x\, \Box \forall y\, Pxy.$$

13) Visa **med resonemang** att i intuitionistisk logik

$$A \rightarrow (B \vee {\sim}C) \ \vDash_I \ {\sim}B \rightarrow {\sim}(A \,\&\, C).$$

Sambandet skall visas med ett resonemang om intuitionistiska tolkningar, det är alltså **inte** tillåtet att använda t.ex. naturlig deduktion.

14) Visa att i intuitionistisk logik

$${\sim}\exists x\, (Fx \,\&\, Gx) \ \nvDash_I \ \forall x\, ({\sim}Fx \vee {\sim}Gx).$$

15) Låt Δ vara en sentensmängd och $q, p_1, p_2, p_3, \ldots$ vara sentenser i första ordningens predikatlogik och $\Gamma_n = \Delta \cup \{p_1, \ldots, p_{n-1}, {\sim}p_n\}$, för $n = 1, 2, \ldots$. Visa att om det för oändligt många n gäller att det finns en modell för Γ_n som gör q sann, så finns en modell för $\Gamma_\infty = \Delta \cup \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ som gör q sann.

16) För vilka tolkningar med ändlig domän är följande sentens i andra ordningens predikatlogik sann? Motivera ditt svar ordentligt.

$$\exists u\, \exists X\, \forall x\, ((Xx \leftrightarrow {\sim}Xu(u(x))) \,\&\, \forall y\, (u(x) = u(y) \rightarrow x = y))$$

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.