KTH matematik
J.Kristoferson, B.Ek

Lösningar tentamen 5B1928 Logik för D och IT, 4 juni 2005

1) Det är klart att A och B antingen båda talar sanning eller båda ljuger. I det första fallet skulle A och B vara kungar, men då är deras uttalanden falska, vilket är omöjligt. Alltså är A och B narrar. Eftersom de ljuger måste också C vara narr,
Svar: A, B och C är alla tre narrar.

2) Att visa: $\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$.
Härledningen blir nog enklast om vi börjar med $B \vee \sim B$ (SI(LEM)).

	(1)	$B \vee \sim B$		SI(LEM)
2	(2)	B	antagande	
2	(3)	$A \to B$	2	SI(PMI)
2	(4)	$(A \to B) \vee (B \to A)$	3	$\vee$I
5	(5)	$\sim B$	antagande	
5	(6)	$B \to A$	5	SI(PMI)
5	(7)	$(A \to B) \vee (B \to A)$	6	$\vee$I
	(8)	$(A \to B) \vee (B \to A)$	1,2,4,5,7	$\vee$E

Slutsatsen på rad (8) beror inte av någonting, så **saken är klar**.

3) Att visa: $\exists x\,(Px \vee Qx),\ \forall x\,(Px \to Qx) \vdash \exists x\,Qx$.
Idé: Rakt fram. Börja med ett antagande för $\exists$E.

1	(1)	$\exists x\,(Px \vee Qx)$	premiss		
2	(2)	$\forall x\,(Px \to Qx)$	premiss		
3	(3)	$Pa \vee Qa$	antagande		
4	(4)	Pa	antagande		
2	(5)	$Pa \to Qa$	2	$\forall$E	
2,4	(6)	Qa	5,4	$\to$E	
7	(7)	Qa	antagande		
2,3	(8)	Qa	3,4,6,7,7	$\vee$E	
2,3	(9)	$\exists x\,Qx$	8	$\exists$I	
1,2	(10)	$\exists x\,Qx$	1,3,9	$\exists$E	[a inte i (1),(2),(9)]

Slutsatsen på rad (10) beror bara av premisserna på rad (1) och (2), så **saken är klar**.

4) Vi skall visa att $\forall x\,Px \to \exists y\,Qy \nvDash \forall x\,\exists y\,(Px \to Qy)$.
Påståendet visas av en tolkning som gör den vänstra sentensen sann och den högra falsk. För att $\forall x\,\exists y\,(Px \to Qy)$ skall vara falsk, måste det dels finnas ett element, α säg, med Pa sann, dels måste Ext(Q) vara tom. För att då få $\forall x\,Px \to \exists y\,Qy$ sann måste vi ha att $\forall x\,Px$ är falsk. Det krävs alltså ett element till i domänen, kalla det β, med Pb falsk.
Vi ser att tolkningen $D = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{Ext}(P) = \{\alpha\}$, $\mathrm{Ext}(Q) = \varnothing$ gör:

- $\forall x\,Px \to \exists y\,Qy$ **sann**, ty $\forall x\,Px$ är falsk, eftersom Pb är falsk.
- $\forall x\,\exists y\,(Px \to Qy)$ **falsk**, ty $\exists y\,(Pa \to Qy)$ är falsk, eftersom $Pa \to Qa$ och $Pa \to Qb$ båda är falska, ty Pa är sann och Qa och Qb falska.

Saken är klar.

5) 1. ”Någon potatis har ätits av någon gris, trots att den ansågs oätlig av någon gris.”
dvs ”det finns en potatis x sådan att det finns en gris y som har ätit x och det finns en gris z som ansåg att x var oätlig”,
så **svar**: $\exists x\,(Px \,\&\, \exists y\,(Gy \,\&\, Hyx) \,\&\, \exists z\,(Gz \,\&\, Azx))$.
2. ”De potatisar som ansågs oätliga av minst två grisar, ansågs oätliga av alla grisar.”
dvs ”För varje potatis x gäller: om det finns två skilda grisar y och z som ansåg att x var oätlig, så gäller för varje gris w att w ansåg x vara oätlig.”
så **svar**: $\forall x\,(Px \to (\exists y\,\exists z\,(Gy \,\&\, Gz \,\&\, y \neq z \,\&\, Ayx \,\&\, Azx) \to \forall w\,(Gw \to Awx)))$.
Logiskt ekvivalenta varianter är möjliga.

6) För att avgöra om
$\forall x\, Px \vee Qa, \exists x\,(Px \to Qx) \models \exists x\, Qx$
söker vi motexempel (tolkningar som gör premissen sann och slutsatsen falsk).

I tablån växlar de tre faserna så:
1. Satslogiska 1,7
2. $\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$ 2
3. $\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$ 3–6

Tablån sluter sig, så **slutledningen är giltig**.

$\mathbb{T}:$	$\forall x\, Px \vee Qa$	$\surd_1$
$\mathbb{T}:$	$\exists x\,(Px \to Qx)$	$\surd_{2:b}$
$\mathbb{F}:$	$\exists x\, Qx$	a_3, b_4

Vänster gren:

1	$\mathbb{T}:$	$\forall x\, Px$	a_5, b_6
2	$\mathbb{T}:$	$Pb \to Qb$	$\surd_7$
3	$\mathbb{F}:$	Qa	
4	$\mathbb{F}:$	Qb	
5	$\mathbb{T}:$	Pa	
6	$\mathbb{T}:$	Pb	

7	$\mathbb{F}:$	Pb	7	$\mathbb{T}:$	Qb
		$\times$			$\times$

Höger gren:

1	$\mathbb{T}:$	Qa
2	$\mathbb{T}:$	$Pb \to Qb$
3	$\mathbb{F}:$	Qa
4	$\mathbb{F}:$	Qb
		$\times$

7) Gäller $\forall x \forall y \forall z\,((Rxy\ \&\ Ryz) \to Rzx),\ \forall x \exists y\, Rxy \models \forall y \exists x\, Rxy$?

Uttryckt med "punkter och pilar", så säger slutsatsen att till varje punkt går minst en pil. Ta en godtycklig punkt a. Enligt den andra premissen finns en pil från a till någon punkt b, och en pil från b till någon punkt c (ev. kan några av a,b,c sammanfalla). Den första premissen ger då att det går en pil från c till a, och eftersom a var en godtycklig punkt finner vi att slutsatsen följer av premisserna.

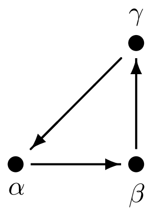
Ett bevis med naturlig deduktion följer ovanstående resonemang (börja med två användningar av den andra premissen osv.):

1	(1)	$\forall x \forall y \forall z\,((Rxy\ \&\ Ryz) \to Rzx)$	premiss		
2	(2)	$\forall x \exists y\, Rxy$	premiss		
2	(3)	$\exists y\, Ray$	2	$\forall$E	
4	(4)	Rab	antagande		
2	(5)	$\exists y\, Rby$	2	$\forall$E	
6	(6)	Rbc	antagande		
1	(7)	$\forall y \forall z\,((Ray\ \&\ Ryz) \to Rza)$	1	$\forall$E	
1	(8)	$\forall z\,((Rab\ \&\ Rbz) \to Rza)$	7	$\forall$E	
1	(9)	$(Rab\ \&\ Rbc) \to Rca$	8	$\forall$E	
4,6	(10)	$Rab\ \&\ Rbc$	4,6	&I	
1,4,6	(11)	Rca	9,10	$\to$E	
1,4,6	(12)	$\exists x\, Rxa$	11	$\exists$I	
1,2,4	(13)	$\exists x\, Rxa$	5,6,12	$\exists$E	[c inte i (1),(4),(5),(12)]
1,2	(14)	$\exists x\, Rxa$	3,4,13	$\exists$E	[b inte i (1),(2),(3),(13)]
1,2	(15)	$\forall y \exists x\, Rxy$	14	$\forall$I	[a inte i (1),(2)]

Slutsatsen på rad (15) beror bara av premisserna på rad (1) och (2), så vi får

Svar: Slutledningen är korrekt.

8) Vi söker en tolkning med ändlig domän D som gör $\forall x \sim Rxx$, $\forall x \forall y\,(Rxy \to \sim Ryx)$, $\forall x \forall y \forall z\,((Rxy \;\&\; Ryz) \to \sim Rxz)$ och $\forall x\, \exists y\, Rxy$ sanna.
Vi formulerar tolkningar med ”punkter och pilar”. Starta med en godtycklig punkt α. Den fjärde sentensen säger att från varje punkt utgår någon pil. Dra en pil från α till en punkt β. Enligt första sentensen måste vi ha $\beta \neq \alpha$.
Dra en pil från β till en punkt γ. Enligt de två första sentenserna måste $\gamma \neq \beta$ och $\gamma \neq \alpha$. Dra en pil från γ till en punkt δ. Enligt de två första sentenserna måste δ vara skild från γ och β, men vi kan ha $\delta = \alpha$. Detta val ger en tolkning som vi ser satisfierar alla fyra villkoren.
(Anm.: den första sentensen är egentligen överflödig eftersom den är en följd av den andra.)



Mer abstrakt: $D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\mathrm{Ext}(R) = \{\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\alpha\rangle\}$ (se fig.)
Denna tolkning gör tydligen alla fyra sentenserna sanna, dvs
Svar: Ja, det kan det.

9) Anta först att α gäller, dvs att q är sann i alla tolkningar som gör p sann. Då kan inte $p \,\&\, {\sim} q$ vara sann i någon tolkning. Speciellt gäller $\nvDash\; p \,\&\, {\sim} q$. Vi får alltså $\alpha) \;\Rightarrow\; \beta)$.
Däremot kan $\nvDash\; p \,\&\, {\sim} q$ vara sant utan att $p \vDash q$ är det. Ta t.ex. p som A och q som B, där A och B är två skilda sentenssymboler (satsvariabler). $\nvDash\; p \,\&\, {\sim} q$ gäller då, t.ex. blir $p \,\&\, {\sim} q$ falsk i en tolkning med A och B sanna. Men $p \vDash q$ är ju falskt, som framgår av tolkningar med A sann och B falsk. Vi får alltså
Svar: $\alpha) \;\Rightarrow\; \beta)$ gäller, $\quad \beta) \;\Rightarrow\; \alpha)$ gäller inte.

10) Låt ϕy vara formeln $a + y = 0 \to y = 0$. Vi skall först visa $\forall y\, \phi y$.
$\phi 0$ gäller eftersom $0 = 0$ är sant.
Antag att ϕb gäller, dvs $a + b = 0 \to b = 0$. Då gäller $a + S(b) = 0 \to S(b) = 0$,
ty $a + S(b) = 0$ är falskt, eftersom $a + S(b) \overset{\text{P4}}{=} S(a+b)$ som är $\neq 0$ enligt P2.
Därmed gäller $\phi b \to \phi S(b)$ för alla b, så $\forall y\,(\phi y \to \phi S(y))$.
Så $\phi 0 \;\&\; \forall y\,(\phi y \to \phi S(y))$ gäller och enligt axiom P7 (alfabetiska varianten med y i stället för x) gäller då $\forall y\, \phi y$, dvs $\forall y(\, a + y = 0 \to y = 0)$. Eftersom detta gäller för godtyckliga a, fås ($\forall$I) att **det önskade** $\forall x \forall y\; (x + y = 0 \to y = 0)$ **är visat**.
Anm.: Induktionsbeviset ovan är av den udda typ där induktionsantagandet inte behöver utnyttjas i induktionssteget.

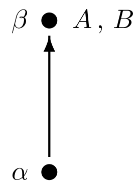
11) Vi skall visa att $\vdash_{S5}\; \Diamond\,(A \to \Box A)$.
Idé: Om det finns någon värld där A är falsk, så gäller ju $A \to \Box A$ där, alltså gäller då $\Diamond\,(A \to \Box A)$. I annat fall är A sann i alla världar, dvs $\Box A$ och därmed $A \to \Box A$ gäller (i alla världar). Alltså gäller $\Diamond\,(A \to \Box A)$ även i detta fall. Denna “falluppdelning” kräver ett indirekt bevis. Vi börjar alltså med att anta ${\sim}\Diamond\,(A \to \Box A)$, och antar sedan ${\sim} A$ för att härleda en motsägelse osv.

1	(1)	${\sim}\Diamond\,(A \to \Box A)$	antagande		
2	(2)	${\sim} A$	antagande		
2	(3)	$A \to \Box A$	2	SI(PMI)	
2	(4)	$\Diamond\,(A \to \Box A)$	3	$\Diamond$I	
1,2	(5)	$\curlywedge$	1,4	${\sim}$E	
1	(6)	${\sim}{\sim} A$	2,5	${\sim}$I	
1	(7)	A	6	DN	
1	(8)	$\Box A$	7	$\Box$I	[(1) fullt modaliserad]
1	(9)	$A \to \Box A$	8	SI(PMI)	
1	(10)	$\Diamond\,(A \to \Box A)$	9	$\Diamond$I	
1	(11)	$\curlywedge$	1,10	${\sim}$E	
	(12)	${\sim}{\sim}\Diamond\,(A \to \Box A)$	1,11	${\sim}$I	
	(13)	$\Diamond\,(A \to \Box A)$	12	DN	

Slutsatsen på rad (13) beror inte av någonting, så **saken är klar**.

12) Vi skall visa att $\Box\,\forall x\,(Px \vee Qx),\ \Box\,\exists x\ {\sim}Px,\ \Diamond\,\exists x\,(Px\,\&\,Qx)\ \nvDash_{S5}\ \Box\,\exists x\,\exists y\ x \neq y.$
Vi söker alltså en tolkning som gör premisserna sanna och slutsatsen falsk.
Att slutsatsen är falsk betyder att det finns en värld, u säg, där $\exists x\,\exists y\ x \neq y$ är falsk, dvs det finns högst ett element i $u(D)$. Enligt premiss två finns i varje värld något element som inte är (har egenskapen) P. Pröva att sätta $u(D) = \{\alpha\}$, där $\alpha \notin u[P]$. Den tredje premissen säger att i någon värld finns ett element som är både P och Q. Denna värld, säg w^*, måste tydligen vara skild från u och innehålla något element β som tillhör både $w^*[P]$ och $w^*[Q]$. Låt $\alpha \notin w^*[P]$ finnas även i denna värld. Den första premissen säger att i varje värld gäller att varje element är antingen P eller Q. Alltså måste vi ha $\alpha \in w^*[Q]$ och $\alpha \in u[Q]$.
Vi finner att tolkningen: $\mathcal{W} = \{w^*, u\},\ D = \{\alpha, \beta\},\quad w^*(D) = \{\alpha, \beta\},\ u(D) = \{\alpha\},$
$w^*[P] = \{\beta\},\ w^*[Q] = \{\alpha, \beta\},\quad u[P] = \varnothing,\ u[Q] = \{\alpha\}$
gör premisserna sanna och slutsatsen falsk, och **saken är klar**.

13) Vi skall visa $\nvDash_I\ ((A\ \vee\ {\sim}A) \to B) \to B$ genom att finna en intuitionistisk tolkning som inte bestyrker $((A\ \vee\ {\sim}A) \to B) \to B$. Låt som vanligt S vara mängden av informationstillstånd, med rot α och ordning $\leq$.
Betrakta tolkningen (se fig.) $S = \{\alpha, \beta\},\ \leqslant = \{\langle \alpha, \beta \rangle\},$
$warr(\alpha) = \varnothing,\ warr(\beta) = \{A, B\}$. Vi finner då:
α bestyrker varken A (ty $A \notin warr(\alpha)$) eller ${\sim}A$ (ty $A \in warr(\beta)$ och $\beta \geq \alpha$). Alltså fås $\alpha \nVdash A\ \vee\ {\sim}A$. Vidare gäller $\beta \Vdash A\ \vee\ {\sim}A$ och $\beta \Vdash B$. Alltså gäller $\alpha \Vdash (A\ \vee\ {\sim}A) \to B$, men $\alpha \nVdash B$. Alltså bestyrker vår tolkning inte $((A\ \vee\ {\sim}A) \to B) \to B$, och **saken är klar**.



14) Vi visar $\vDash_I\ ((A\ \vee\ {\sim}A) \to {\sim}B) \to {\sim}B$ genom att använda naturlig deduktion utan DN-regeln (eller SI-regler härledda med hjälp av denna).
Idé: Anta $(A\ \vee\ {\sim}A) \to {\sim}B$ och försök härleda ${\sim}B$ genom att anta B och härleda en motsägelse.

1	(1)	$(A\ \vee\ {\sim}A) \to {\sim}B$	antagande	
2	(2)	B	antagande	
3	(3)	A	antagande	
3	(4)	$A \vee {\sim}A$	3	∨I
1,3	(5)	${\sim}B$	1,4	→E
1,2,3	(6)	$\curlywedge$	5,2	∼E
1,2	(7)	${\sim}A$	3,6	∼I
1,2	(8)	$A \vee {\sim}A$	7	∨I
1,2	(9)	${\sim}B$	1,8	→E
1,2	(10)	$\curlywedge$	9,2	∼E
1	(11)	${\sim}B$	2,10	∼I
	(12)	$((A\ \vee\ {\sim}A) \to {\sim}B) \to {\sim}B$	1,11	→I

Slutsatsen på rad (12) beror inte av någonting, så **saken är klar**.

Alternativt kan man lösa uppgiften genom ett resonemang om tolkningar.

15) Eftersom det för varje tolkning finns något p_i som är sant i denna saknar sentensmängden $\{{\sim}\,p_1, {\sim}\,p_2, {\sim}\,p_3, \ldots\}$ modell. Enligt kompakthetssatsen finns en ändlig delmängd som saknar modell, varav följer att det finns något m sådant att sentensmängden $\{{\sim}\,p_1, {\sim}\,p_2, \ldots, {\sim}\,p_m\}$ saknar modell. Detta medför att sentensen ${\sim}p_1\ \&\ {\sim}p_2\ \&\ \ldots\ \&\ {\sim}p_m$ är falsk i varje tolkning, varav (ekvivalens enligt generaliserad de Morgan) följer att ${\sim}(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m)$ är falsk i varje tolkning. Alltså är $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m$ sann i varje tolkning och **saken är klar**.

16) Den givna sentensen $\exists u\,\exists X \forall x\,(Xx\ \leftrightarrow\ {\sim}\,Xu(x))$ är sann i en tolkning (här given av sin domän D) precis om det finns någon funktion $f : D \to D$ och någon delmängd $\mathcal{M}$ ($= \mathrm{Ext}(X)$) till D sådan att för varje element x i D gäller att x tillhör M om och endast om $f(x)$ inte tillhör M. Om D bara har ett element blir sentensen tydligen falsk, annars blir den sann, t.ex. om $D = \{a, b\}$, då vi kan sätta t.ex. $M = \{a\},\ f(a) = b,\ f(b) = a$. Vi får alltså
Svar: Sentensen är betingat sann.