Institutionen för Matematik, KTH
Avd. Matematik
TK 991029

5B1102/2, Differential- och integralkalkyl I, del 2

Preliminär version av läsanvisningar, kap. 12-13, till
R.A. Adams, Calculus, a Complete Course, 4th ed.

Omfattning: kapitel 8.2, 8.3 t.o.m. s 497, 8.4, endast båglängd, 8.5 tom s. 506, 10.1, 10.5, 11.1, 11.3, 12.1-12.7, 12.8, sid 750-752, 12.9, 13.1-13.2, 13.3 t.o.m. s. 789, 14.1-14.2, 14.3 till sid 834, 14.4-14.6, 14.7 t.o.m. s. 866, 15.1-15.4, 15.5 bara fallet $z = f(x, y)$, 15.6, 16.1, 16.3, 16.4.

I. Derivator och integraler i flera variabler

Kapitel 12 Partiella derivator

12.1 Funktioner av flera variabler.

Definitionsmängd (domain of definition) och värdemängd (range) enl. def. 1.
Grafer: Ex. 1-2.
Nivåkurvor och -ytor: Ex. 3-5.
Läs gärna om andragradsytor i kap. 10.5 parallellt. Figur 10.35 är viktig med tanke på kommande analys av kritiska punkter (kap 13).

12.2 Gränsvärden och kontinuitet i flera variabler.

Gränsvärden och kontinuitet definieras (def. 2, 3, 4) i princip som för funktioner av en variabel. De vanliga räknelagarna gäller.

Observera att man kräver $|(x, y) - (a, b)| \to 0$. Den stora skillnaden är att man i en dimension bara kan låta $x \to a$ från två håll, uppifrån och nedifrån. I två dimensioner finns det massor av sätt att låta $(x, y) \to (a, b)$.

Ex. 1 är typiskt för funktioner som är definierade överallt.
Funktionerna i Ex. 2-4 är inte från början definierade i origo. Man kan då undersöka om funktionen i fråga har olika gränsvärden då $(x, y) \to (0, 0)$ längs olika kurvor. Detta är fallet i Ex. 2-3.

I Ex. 4 är själva poängen att täljarens gradtal är högre än gradtalet för samtliga termer i nämnaren. Omvänt är just detta problemet i Ex. 2-3.

12.3 Partiella derivator.

Definition av och beteckningar för partiella derivator; Ex. 1-3.
Den geometriska betydelsen är viktig och framgår av fig 12.15-12.16.
Tangentplan, normal, -linje (sid 711-712). Fig 12.17; ex 6-7.

12.4 Högre partiella derivator.

Beteckningar sid 715. Ex. 1.
Man skall känna till och kunna använda resultatet i Th. 1.
Laplaces ekvation, vågekvationen och värmeledningsekvationen är fundamentala i tillämpningar. Se Ex 3-4 samt övning 17.

12.5 Kedjeregeln.
Kedjeregeln för $z(x(t), y(t))$ och $z(x(s,t), y(s,t))$, sid 721-722. Ex 2-3.
Observera kommentaren på nedre delen av sid 722 om matrismultiplikation. Det gör den allmänna kedjeregeln lättare att komma ihåg och förstå. (Se sid 736-737 i kap 12.6.) Se också Ex 6-7 och fig 12.21.
Kedjeregeln för högre ordningens derivator: Ex 8, 9. Hoppa över Eulers sats, Th. 2.

12.6 Linjär approximation mm.
Linjärisering och linjär approximation, sid 731-732, Ex. 1. (Högre ordningens approximationer fås från Taylors formel i kap 12.9.)
Idén med differentierbarhet (Def 6) är att det skall finnas ett tangentplan. Th. 4 ger enkla villkor för detta.
I Ex 3 visas hur man med hjälp av differentialer kan göra approximationer.
På sid 736-737 formuleras den allmänna kedjeregeln. Man skall känna till Jacobimatrisen. Den kommer senare att dyka upp i samband med variabelbyte i dubbel- och trippelintegraler.

12.7 Gradient och riktningsderivata.
Definition av gradient (def 7); tolkning av densamma som normal: Th. 6 och Ex 1.
Riktningsderivata (def 8) och beräkning av denna med hjälp av gradienten: Th. 7 och Ex 2. Se också sid 746: "Rates perceived by ...
I rutan längst ned på sid 743 ges en viktig annan tolkning av gradienten: *den riktning som representerar den största förändringen*; Ex 3.
På sid 685-686 behandlas tre dimensioner och det är helt analogt. Observera dock Ex 6-7, fig. 12.25 och kommentaren i rutan nedanför. Läs också Ex 8.

12.8 Implicita funktioner.
Endast situationen med en kurva i två dimensioner ingår; sid. 689-690. Figuren på 13.28 visar hur det fungerar.

12.9 Taylors formel mm.
Taylorpolynom (nedre rutan sid 763); approximation. Ex 1-2. Under föreläsningarna behandlas främst Taylors formel av ordning 2. Detta med tanke på andraderivatetestet (§13.1) som används vid karakterisering av kritiska punkter.

Kapitel 13 Tillämpningar av partiella derivator

13.1 Extremvärden.
Vid bestämning av största och minsta värde behövs några begrepp från kap. 10.1. Randpunkt, inre punkt, yttre punkt... enl definitioner på sid 602. Det är viktigt att man, åtminstone i enklare fall, förstår dessa begrepp.

Th. 1 visar att extremvärden bestäms ungefär som i en dimension, men det är mer krävande. Man måste kolla fler derivator och analysen av en funktion på randen, en eller flera kurvor i två dimensioner, är förstås besvärligare.
Ex 1-4.
I fig 13.1-13.3 ser man vad som händer i extrempunkter för olika andragradsytor (jfr kap 10.5). Genom Taylors formel kan många fall återföras till denna situation. Det är helt analogt med hur man i en variabel med hjälp av andraderivatan kan avgöra karaktären till en extrempunkt. Idén framgår tydligt i Ex 5.

Genom kvadratkomplettering får man Th. 3. I Ex 6 behandlas Ex 5 igen men utgående från Th. 3.

Tyvärr fungerar inte Th. 3 för tre eller fler variabler. Man dock kan alltid, i godtycklig dimension, titta på andraderivatorna direkt. Se avsnittet om kvadratiska former (quadratic forms), sid 776-778.

De kriterier som diskuteras på sid 778 kan uttryckas enklare med hjälp av matrisens egenvärden. Att Q är positivt definit betyder att samtliga egenvärden är > 0. Att Q är indefinit betyder att det finns egenvärden med olika tecken. Detta gäller i godtycklig dimension.

13.2 Största och minsta värden.

Läs ex 1-2 (direkta tillämpningar av Th. 1). Hoppa över avsnittet om linjär programmering.

13.3 Lagrangemultiplikatorer

Även om man i många exempel kan behandla problem med bivillkor 'direkt', är det nästan alltid enklare med Lagranges metod, Th. 4. Idén illustreras i figur 13.14. Läs Ex. 1-3 och hoppa över resten av kapitlet.

Kapitel 14 Multipelintegraler

14.1 Dubbelintegraler.

Dubbelintegralen införs som gränsvärde av Riemannsummor ungefär som i en dimension. Motivering är att beräkna volymen under en (positiv) funktion f på D. Speciellt får man för $f = 1$ arean av D.

14.2 Dubbelintegraler och upprepad integration.

Genom upprepad integration får man en metod att beräkna dubbelintegraler (Th. 2). Figur 14.13 förklarar varför metoden fungerar. Det är viktigt att från en figur kunna finna gränserna i de upprepade integralerna. Läs Ex 1-2.
För att kunna explicit beräkna en dubbelintegral måste man hitta en primitiv funktion. Det kan därför spela roll i vilken ordning man utför den upprepade integrationen. Se Ex 3.

14.3 Generaliserade dubbelintegraler och upprepad integration.

Dessa utförs, som i envariabelsfallet, via gränsvärden. Se Ex 1 och Ex 3. Hoppa över

14.4 Dubbelintegraler i polära koordinater.

Formeln för areaelementet i polära koordinater är viktig och användbar:

$$dx\,dy = dA = r\,dr\,d\theta.$$

Läs Ex 1 och Ex 3. Ex 4 är klassisk (normalfördelningen).

Formeln för (ett allmänt) variabelbyte i en dubbelintegral, Th. 4, är viktig. Memorera den den på formen

$$dxdy = dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Ex 7-8.

14.5 Trippelintegraler.
Trippelintegraler införs och beräknas helt analogt med dubbelintegraler. Denna gång fås volymen vid integration av funktionen 1. Läs Ex 2 och Ex 4.

14.6 Variabelbyte i trippelintegraler.
Helt analogt med avsnitt 14.4. Notera speciellt *cylindriska koordinater* (polära koordinater tillsammans med z), sid 856-857,

$$dxdydz = dV = rdr\, d\theta\, dz,$$

och *sfäriska koordinater*. Dessa definieras på sid 859, och genom fig 14.41. De kan ses som en tredimensionell motsvarighet till polära koordinater. Volymselementet är

$$dxdydz = dV = \rho^2 \sin\phi d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

Ex 2-3.

14.7 Tillämpningar av multipelintegraler.
Observera att ytelementet dS (sid 865) är helt analogt med båglängdselementet i en variabel. I stället för $ds = \sqrt{1+(y')^2}$ har vi nu $dS = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}$. Fig 14.45 ger en geometrisk förklaring. Det är redan nu värt att notera att $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}$ är längden av den, onormaliserade, normalvektorn till ytan, $\mathbf{N} = \pm(-z'_x, -z'_y, 1)$.

II. Vektoranalys

Kapitel 8 och 11 i urval; Kurvor, båglängd mm

Tanken är att parallellt läsa om kurvor i två och tre dimensioner.

(**8.1** Orientering om andragradskurvor som "kägelsnitt" för de intresserade.)

8.2-8.3 t.o.m. sid 497. Dessa avsnitt är av orienterande karaktär. Man skall främst lära sig att handskas med kurvor med allmän parameter.
8.2 Parametrisk kurva, def. 4. Kurva i planet, def 5. Ex 1-7.
8.3 Sats 1, Ex. 1-2. Tangent och normal till plana kurvor.

8.4 tom sid 201. Båglängdsformeln, sid 500. Dess förklaring i fig. 8.28 (Pythagoras sats). Ex. 1-2. (Areaberäkningar utförs senare med hjälp av Greens formel i kap 16.3.)

8.5 Polära koordinater (igen), sid. 506. Ex 1-2. Hoppa över fr o m rubriken "Some Polar Curves".

11.1 Viktiga begrepp: position, hastighet (velocity) och acceleration för en kurva (sid. 646-648). Notera att de alla tre är vektorer. Begreppet fart (speed) står för längden av hastighetsvektorn. Det är således en vanlig funktion (en "skalär").
Läs Ex. 1-5.

11.3 Det är viktigt att förstå att en kurvas hastighet och fart osv beror på parametriseringen. Man kan genomlöpa en viss kurva olika snabbt.

En kurvas båglängd införs på samma sätt i två och tre dimensioner. Som funktion är båglängden en primitiv funktion till kurvans fart. Konsekvensen är att om man väljer båglängden själv som parameter får kurvan konstant fart 1. Läs Ex. 1-4.

Kapitel 15 Vektorfält

(**15.1** Detta avsnitt, som handlar om vektorfält, är snarast en orientering inför senare studier av linje- och flödesintegraler. Läs gärna t.o.m. sid 879.)

15.2 t.o.m. sid 887. Begreppen konservativt fält och potentialfunktion är viktiga (Def. 1). Kriterierna för att fält skall vara konservativa på sid. 884 dyker upp mer naturligt i kap. 16 i samband med Greens och Stokes' formler.

De kan lättare uttryckas så att matrisen med Fs derivator skall vara symmetrisk.
Läs Ex. 3-4 där man bestämmer potentialfunktioner. Ex. 5 är mer subtilt.

15.3 Läs Ex. 1-2 som exempel på hur man integrerar funktioner m.a.p. båglängd. En tolkning av $\int_C f\,ds$ är arean av ett staket, där C är basen (tomtgränsen), och f höjden.

15.4 Linjeintegralen motiveras genom arbete = kraft $\times$ sträcka. Dess definition och olika sätt att skriva integralen framgår av rutan på sid. 897. Läs Ex. 1 och 2.

Hoppa över "connected and simply connected domains". Vad som är relevant i de flesta situationer är huruvida man för ett fält med en singularitet (Ex 5 i 17.2) omsluter singulariteten.

Sats 1, sid. 901, om oberoende av väg, är viktig. T ex kan man, för ett konservativt fält, välja en annan, lättare, integrationsväg. Obs den översta rutan på sid 902: om man har bestämt en potentialfunktion så är linjeintegralen skillnaden mellan potentialfunktionens värden i änd- och begynnelsepunkterna.
Läs Ex 3 och 4.

15.5 Vi skall bara behandla integraler över funktionsytor (grafer). Observera likheten mellan areaelementet $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$ för en yta $z = z(x, y)$, och båglängdselementet $ds = \sqrt{1 + (y')^2}$ för en kurva $y = y(x)$. Läs Ex 4-5.

15.6 Normal, orientering: se fig. 15.26. Flöde(sintegral): Def. 6. För flödesintegraler över funktionsytor används resultatet i rutan längst ned på sid 922.
Läs Ex. 4.

Kapitel 16 Integralformler

16.1 till mitt på sid 929.Divergens och rotation (curl): övre rutan på sid 928. Gradienten, sid 927, känner vi till sedan tidigare.

Det är viktigt att göra klart för sig hur operationerna fungerar: grad är definierad för funktioner och ger vektorer. div är definierad för vektorer och ger funktioner (skalärer), medan rotationen är definierad för vektorer och ger vektorer. Läs Ex. 1-2.

16.3 Huvudresultatet är Greens formel, Th. 6. Observera att formeln inte gäller för kurvor i planet som inte är slutna.

Observera ytformeln i Ex. 1. Läs också Ex. 2.

Exempel 3 illustrerar återigen att speciella effekter uppstår för vektorfält med singulariteter. Poängen är att fältet är singulärt i origo och att, om man går runt denna punkt, får man ett bidrag, nämligen 2π.

Divergenssatsen, Th. 7, får man lätt från Greens formel. De är ekvivalenta. Skillnaden är att man i Greens formel använder randkurvans tangent, och i divergenssatsen normalen till randkurvan. Om den orinterade tangenten är (T_1, T_2), saa är den utåtriktade normalen $(T_2, -T_1)$.

16.4 Det viktiga resultatet är divergenssatsen, Gauss' formel, i Th. 8. Läs Ex. 1-5. Vi skall inte använda de vektorversioner som nämns i Th. 9.

(**16.5** Stokes' sats är helt enkelt Greens formel för en krökt yta.)

Rekommenderade övningar: **12.1:** 1, 7, 13, 15, 19, 21, 25, 27, 39. **12.2:** 3, 7, 9, 13. **12.3:** 1, 5, 11, 13, 23, 35, 39. **12.4:** 9, 15, 17. **12.5:** 1, 3, 7, 15, 17, 23, 31. **12.6:** 1, 7, 13, 15, 17. **12.7:** 1, 5, 11, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 27. **12.8:** 1, 3, 7, 11, 13.

13.1: 1,3, 9, 17, 19, 21, 23, 27. **13.2:** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. **13.3:** 1, 3, 5, 7.

14.2: 5, 9, 11, 13, 15, 19, 23, 27. **14.4:** 3, 9, 17, 25, 29, 33. **14.5:** 3, 5, 9, 15, 27. **14.6:** 1, 15, 17, 21, 25, 29. **14.7:** 1, 3, 7, 9.

8.2: 1, 9, 15. **8.3:** 5, 9, 17. **8.4:** 1, 3, 9.

11.1: 3, 9, 15, 17. **11.3:** 1, 5, 13, 17.

15.2: 1, 3, 7, 9. **15.3:** 1, 5, 7. **15.4:** 1, 3, 7, 11. **15.5:** 1, 3, 7, 15. **15.6:** 1, 7, 9, 13.

16.1: 1, 3, 9. **16.3:** 1, 3, 5, 7. **16.4:** 1, 5, 9, 11, 13.