5B1103, Differential– och integralkalkyl II, del 1.

LÄSANVISNINGAR TILL
R.A. ADAMS, CALCULUS, A COMPLETE COURSE, 4TH ED.

OMFATTNING: kapitel 1.1–1.5, Appendix III, 2, 3.1–3.4, 3.5 till def. 13, 17.7 t.o.m. s. 1012, 17.8 t.o.m. s. 1019, 4.2, 4.3 (endast andraderivatetestet), 4.4 t.o.m. exempel 5, 4.5, 4.7–4.8, 9.8 t.o.m. exempel 2, 4.9, 5, Appendix IV, 6.1, 6.2 t.o.m exempel 8, 6.3 exemplen 1–7, 6.5, 7.1–7.3, 9.1–9.2, 9.3 t.o.m. s. 541, 9.4 t.o.m. exempel 1, 9.5 t.o.m. s. 555 samt Th. 19.

Kap. P. Detta kapitel utgör Inledande kurs i matematik. I kapitlet beskrivs vilka bakgrundskunskaper som förutsätts.

Kap. 1. Kontinuitet och gränsvärden.
Appendix III. Kontinuerliga funktioner.

1.1 Detta avsnitt är av orienterande och motiverande karaktär.

1.2–1.3 Gränsvärdesbegreppet är fundamental i kursen. Du skall bilda dig intuitiv uppfattning om vad som menas med gränsvärde resp. ensidig gränsvärde för en funktion i en punkt (1.2) och i oändligheten (1.3). Testa dig själv på några av uppgifterna i läroboken. Oroa dig inte om du tycker att det kan vara svårt att komma på vilka ”knepp” som leder till framgång: senare i kursen kommer du att bekanta dig med mycket kraftfulla metoder för beräkning av gränsvärden. Tänk igenom om/hur du använder Sats 1 resp. Sats 2 (s. 64–65) i dina beräkningar.

1.4 I detta avsnitt definieras kontinuerliga funktioner: Def. 5–8 och Sats 5, s. 76–78. ”De vanliga funktionerna” är kontinuerliga: Nedre delen av s. 78 samt Sats 6–7, s. 79.
Sats 8, s. 80 är mycket viktig. Man bör förstå att satsen inte är sann, och varför, om man ändrar någon av förutsättningar; se fig. 1.24–1.27.
Sats 9, ”satsen om mellanliggande värden”, används i tillämpningar för att approximera rötter till ekvationer.

1.5 Du bör förstå de formella definitionerna 9–11 i ljuset av de informella.

Appendix III ger en teoretisk underbyggnad för kapitel 1 och bör läsas noga.

Kap. 2. Derivation.

2.1 I detta avsnitt förbereds derivatans införande genom en diskution av lutning (slope) och tangentlinjer till kurvor $y = f(x)$. Det mesta bör vara bekant från gymnasiet, men, notera formeln för normalens lutning, s. 99.

2.2 Def. 4. Du bör i enkla exempel kunna beräkna derivator utgående från definitionen. Läs om Leibniz' beteckningar och differentialer, s. 107.

2.3 Du skall veta att deriverbarhet medför kontinuitet (Sats 1, s. 110). Deriveringsreglerna i Sats 2–5 måste man behärska; det finns inget utrymme för att göra fel här. Deriveringsreglerna skall sitta i ryggmärgen.

2.4 Kedjeregeln, Sats 6, s. 119, är en hörnsten i differentalkalkylen och måste behärskas aktivt.

2.5 Med hjälp av gränsvärdet $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$ (Sats 8, s. 124), kan man härleda derivatan till sinusfunktionen. Trigonometriska formler ger, tillsammans med deriveringsreglerna, uttryck för derivatorna till cosinus–, tangens– och cotangensfunktionerna, som man också skall kunna. Observera att derivatan av tangens kan skrivas $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

Anm. I engelspråkig litteratur används ofta sekantfunktionerna sec x, osv. Vi kommer inte att göra detta.

2.6 Medelvärdessatsen (Sats 11, s. 131) är mycket viktig. Satsens geometriska betydelse framgår av figur 2.25. Figur 2.26 på samma sida visar att man inte kan ändra på någon av satsens förutsättningar.
Med hjälp av medelvärdessatsen kan man dra slutsatser om en funktions avtagande/växande (dessa begrepp införs i def. 5) om man vet derivatans tecken i ett intervall. Det viktigaste ur tillämpningssynpunkt är just detta, formulerat i Sats 12, s. 134. Det är lätt att övertyga sig själv om att medelvärdessatsen gäller i det fall då funktionen antar lika värden i intervallets ändpunkter (Rolles sats, s. 134). Notera att man behöver här satsen om största och mista värde (max/min Theorem 8, s. 80). Från Rolles sats får man medelvärdessatsen genom ett slags variabelbyte; se fig. 2.30, s. 136.

2.7 Det kan vara bra att skumma igenom detta avsnitt för att bekanta sig med några tillämpningar av derivatan.

2.8 Högre ordningens derivator införs på naturligt sätt.

2.9 Exemplen 1–6 illustrerar hur man bestämer derivatan till en funktion $y = f(x)$ då funtionen ges av ekvationen $F(x,y) = 0$.

2.10 Antiderivata (primitiv funktion), def. 7, och obestämd integral, def. 8. Differentialekvationer och begynnelsevärdesproblem, s. 157.

2.11 Hastighet, fart och acceleration. Läs exemplen 1–6.

Kap. 3. Transcendenta funktioner.

3.1 Inverterbara (one–to–one) funktioner, def. 1. Invers funktion, def. 2, och dess egenskaper, s. 175. Figurerna 3.3–3.5 visar hur man får fram inversen genom att spegla funktionen i linjen $y = x$. Inversens derivata, mitt på s. 177 och förklarande figur 3.6.

(3.2) ingår i inledande kurs. Repetera gärna avsnittet.

3.3 Här införs funktionen $\ln x$ som area av ett område mellan kurvan $y = 1/x$ och x–axeln. Man visar (Sats 1) att $\ln x$ är den primitiva funktionen till $1/x$ som antar värdet 0 för $x = 1$. Från denna sats följer sedan logaritmlagarna (Sats 2) direkt. Exponentialfunktionen införs som invers till $\ln x$ och exponentiallagarna (Sats 3) följer av logaritmlagarna. Man definierar talet e genom $\mathrm{e} = \exp 1$ och visar att $\exp x = \mathrm{e}^x$. Sambandet (def. 7) är viktig. Någon gång kan du ha användning av logaritmisk derivering (Exemplen 8–10).

3.4 Exponentiell och logaritmisk tillväxt: Sats 5, och dess sammanfattning i rutan på s. 194. Funktionen e^x som gränsvärde (Sats 6).

3.5 Sinus och andra trigonometriska funktioner är periodiska och därmed inte inverterbara: alla värden antas ju oändligt många gånger. Genom att betrakta dem på lämpliga delintervall, kan man invertera. På så sätt får man arcusfunktionerna (def. 9, 11 och 12 samt fig. 3.18, 3.22 och 3.25(a)). Derivator av arcusfunktioner (s. 203, 206 och 208). Avsnittet bör läsas med ordentlig eftertanke. (Inverser till sekantfunktionerna, s. 208–209 ingår inte.)

Kap. 17. Ordinära differentialekvationer.

17.7 Karakteristiska ekvationen (**), s. 1008. Beroende av hur de karakteristiska rötterna ser ut, uppstår tre fall (s. 1008–1009). De kan beskrivas som (I) skilda reella rötter, (II) sammanfallande reella rötter, samt (III) icke–reella rötter. Läs exempel 1–5.

17.8 Den allmänna lösningen till en inhomogen ekvation är $y_h + y_p$, där y_p är en godtycklig (vilken som helst) partikulärlösning, och där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation. Ansats för partikulära lösningar (i enkla fall) ges i rutan på s. 1018. Resonans på s. 1019. (Variation av parametrar, s. 1020–1021 ingår inte.)

Kap. 4. Tillämpningar av derivator.

(4.1) Ingår inte. Det kan ändå vara bra att skumma igenom exemplen 1–6.

4.2 Extremvärden: def. 1 (globala), def. 2 (lokala). Kritiska punkter, singulära punkter. Sats 1, s. 234 är max/min satsen från kap. 1 (s. 80). Sats 2 (s. 235) och Sats 3 (s. 236) är mycket viktiga. De ger en metod för att finna största och minsta värden till en kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat intervall.

4.3 I detta avsnitt ingår bara andraderivatatestet, Sats 6, s. 244.

4.4 Endast asymptotbegrepet, def. 5–7. Läs exempel 1–5.

4.5 I avsnittet behandlas ”ostrukturerade” max/min–problem. Man måste själv formulera problemen matematiskt.

4.7 Formeln för linjär approximation (dvs. approximation av en funktionsgraf med dess tangentlinje) enligt def. 8, s. 274. Felet vid approximationen enligt Sats 9, s. 275.

4.8 Taylors formel, Sats 10, s. 282, är en generalisering av linjär approximation. Denna gång approximeras funktionen med ett polynom av högre grad. Storleksordningen på restermen i en Taylorutveckling kan på ett bekvämt sätt beskrivas med hjälp av stort ordobegreppet (big–O, def. 9). Utvecklingarna i rutan på s. 286 skall memoreras.

9.8 T.o.m. exempel 2.

4.9 l'Hôpitals regel (Sats 12, s. 290 och Sats 13, s. 292) är det viktigaste verktyget för beräkning av gränsvärden.

Kap. 5. Integration.
Appendix IV.

5.1–5.2 Här diskuteras areabegreppet och beräkning av areor genom gränsövergång. Man bör genomföra någon sådan beräkning för att till fullo uppskatta effektiviteten i den metod vi senare beräknar integraler med.

5.3 Bestämda integraler införs genom över– och undersummor. Idén är att då indelningen blir finare skall, för ”integrerbara” (def. 3) funktioner, dess över– och undersummor båda ha samma gränsvärde, integralen av funktionen. Sats 2, s. 316, visar att denna procedur fungerar för kontinuerliga funktioner.

Appendix IV I avsnitt 5.3 definierades den bestämda integralen endast för kontinuerliga funktioner. Med den teknik som används i appendix IV utvidgas begreppen ”integrerbar”/”icke–integrerbar” till godtyckliga begränsade funktioner.

5.4 Här härleds diverse egenskaper till den bestämda integralen (Sats 3, s. 317–318). Integralkalkylens medelvärdessats (Sats 4, s. 320) kommer in i den oumbärliga Integralkalkylens fundamentalsats i nästa avsnitt.

5.5 Sats 5, Integralens fundamentalsats, är vad gör integralen till ett användbart verktyg, genom kopplingen till differentialkalkylen. Satsen visar att varje kontinuerlig funktion har en primitiv funktion.

5.6 Variabelsubstitution i integraler, Sats 6, s. 322, innebär att man använder kedjeregeln baklänges. Det är en viktig metod.
I samband med integrering av trigonometriska funktioner bör man känna till formlerna för dubbla vinkeln (se nedre halvan av s. 335).

5.7 Beräkning av area mellan två kurvor. Man måste först bestämma kurvornas skärningspunkter och sedan kontrollera vilken av funktionerna som är störst i resp delintervall. Därefter beräknas integralen på vanligt sätt.

Kap. 6. Beräkning av integraler.

6.1 Formeln för partiell integration (ruta på s. 345) är viktig. Den följer av produktregeln för derivator. Läs exempel 1, 2, 4, 5, 6.

6.2 Läs exempel 1–8.

6.3 Det grundläggande exemplet i detta avsnitt är då nämnaren har skilda och enkla nollställen, som i rutan på s. 362. Detta behandlas i ex. 3–4. Om någon faktor i nämnaren saknar reella nollställen måste man göra en annan ansats, som i ex. 5–6. I ex. 7–8 visas vad som händer om någon av faktorerna förekommer flera gånger. Tänk på att den beskrivna tekniken fungerar endast då täljaren är av lägre grad än nämnaren.

6.5 I detta avsnitt behandlas ”generaliserade” integraler. Det är två olika saker man måste tänka på. Dels kan integrationsintervallet vara oändligt, dels kan integranden vara obegränsad i närheten av någon punkt. Man måste då beräkna integralen som ett gränsvärde. Sats 2–3 är viktiga då man vill undersöka integralens konvergens. Dessa satser behövs senare i samband med konvergens av serier.

Kap. 7. Tillämpningar av integraler.

7.1 Fig. 7.2–7.4 ger en föreställning om varför, rent allmänt, volym är integralen av area (formeln på övre halvan av s. 408). Formeln längst ned på s. 408 behandlar rotation kring x–axeln. Cylindriska skal, s. 411, bygger på en annan idé. Fig. 7.9 visar varför formeln på s. 412 gäller.
En sammanfattning av olika fall av rotationsvolymer finns på s. 414. Det är nog bättre att man lär sig hur dessa formler härleds, i stället för att lära dem utantill.

7.2 Här behandlas andra volymsberäkningar, där metoden är att dela upp kroppen i ”tunna skivor”, vars area man kan bestämma, varefter man ”summerar” dessa, dvs. integrerar arean.

7.3 Båg– eller kurvlängd: formlerna mitt på s. 422. Figur 7.22 förklarar mekanismen.
Area av rotationsyta: se sammanställning på s. 426.
Återigen rekommenderas att man lär sig härledningen av dessa formler.

Kap. 9. Talföljder, serier och potensserier.

9.1 Def. 1–2, räknelagar (den stora rutan på s. 522). Viktiga satser: Sats 1–2. Vissa delar av detta avsnitt behandlas i appendix III, s. A–25.

9.2 Konvergens av en (oädlig) serie betyder att följden av dess partialsummor konvergerar (def. 3). Den geometriska serien (def. 4) och resultaten om den (s. 529) är ett måste. Ex. 4 skall man känna till: den harmoniska serien är divergent. Sats 4, s. 532, ger en test för divergens: om inte den allmänna termen a_n går mot noll så är serien divergent. Observera att omvändningen av denna sats är falsk: den harmoniska serien är divergent, men dess allmänna term går mot noll.

9.3 Positiva serier. Detta är det centrala avsnittet i kapitlet. Det är viktig att förstå att för positiva serier finns bara två möjligheter: seriens summa är ändlig (dvs serien är konvergent) eller oändlig (dvs serien är divergent). Integraltestet, Sats 8, s. 535, är viktig. Fig. 9.4 visar varför det fungerar. Dess konsekvens i Ex. 1, om p–serier, är ett måste. I Ex. 2 ges prov på en annan tillämpning av integraltestet. Sats 9, s. 538, och Sats 10, s. 539, ger de viktigaste metoderna för undersökning av konvergensen. Måste kunnas. Ex. 4–6 illustrerar dessa satser. Resten av avsnittet kan hoppas över.

9.4 Absolutkonvergens, def. 5, Sats 13, s. 544, är viktig. Betingat (conditional) konvergens, def. 6, Ex. 1, s. 547. Resten av avsnittet ingår inte.

9.5 (t.o.m. s. 555, samt Th. 19) I samband med Taylors formel såg vi exempel på potensserier. Här dyker den geometriska serien upp igen. Sats 17, s. 554, skall man känna till. Där ingår det viktiga begreppet konvergensradie. Den kan beräknas enligt formeln i rutan på s. 555.
Man skall kunna använda Sats 19, s. 563: Innanför konvergensintevallet får man derivera eller integrera en potensserie termvis. Läs Ex. 5–7, s. 561–563.