5B1103

Läsanvisningar till: R.A. Adams, Calculus, a Complete Course, 4th ed.

Del 2 (funktioner av flera variabler).

Omfattning:

Kapitel 8.1 Repetition från linalg/självstudier,
8.2-8.3 t.o.m. Example 3,
8.4 t.o.m. Example 2,
8.5 t.o.m. Example 2,
10.1, 10.5 Repetition från linalg/självstudier,
11.1, 11.3,
11.4-11.5 endast krökning,
12.1-12.9,
13.1-13.2 t.o.m. sid 782,
13.3,
13.5 t.o.m. Example 3,
14.1-14.2,
14.3 t.o.m. Remark,
14.4-14.7 t.o.m. Example 1,
15.1 t.o.m. Example 5,
15.2 t.o.m. nödvändiga villkor för konservativa fält i $\mathbf{R}^3$ samt Ex. 4,
15.3-15.4,
15.5 t.o.m. Example 8,
15.6,
16.1,
16.3-16.4 t.o.m. Example 5,
16.5.

Kapitel 12. Partiella derivator.

12.1. Funktioner av flera variabler. Definitionsmängd (domain of definition) och värdemängd (range) enl. def. 1. Grafer: Ex. 1-2. Nivåkurvor och -ytor: Ex. 3-5. Läs gärna om andragradsytor i kap. 10.5 parallellt. Figur 10.35 är viktig med tanke på kommande analys av kritiska punkter (kap 13).

Rekommenderade övningar: 1, 7, 13, 15, 19, 21, 25, 27, 39.

12.2. Gränsvärden och kontinuitet i flera variabler. Gränsvärden och kontinuitet definieras (def. 2, 3, 4) i princip som för funktioner av en variabel. De vanliga räknelagarna gäller.

Observera att man kräver $|(x, y) - (a, b)| \to 0$. Den stora skillnaden är att man i en dimension bara kan låta $x \to a$ från två håll, uppifrån och nedifrån. I två dimensioner finns det massor av sätt att låta $(x, y) \to (a, b)$.

Ex. 1 är typiskt för funktioner som är definierade överallt. Funktionerna i Ex. 2-4 är inte från början definierade i origo. Man kan då undersöka om funktionen i fråga har olika gränsvärden då $(x, y) \to (0, 0)$ längs olika kurvor. Detta är fallet i Ex. 2-3.

I Ex. 4 är själva poängen att täljarens gradtal är högre än gradtalet för samtliga termer i nämnaren. Omvänt är just detta problemet i Ex. 2-3.

Rekommenderade övningar: 3, 7, 9, 13.

12.3. Partiella derivator. Definition av och beteckningar för partiella derivator; Ex. 1-3. Den geometriska betydelsen är viktig och framgår av fig 12.15-12.16. Tangentplan, normal, -linje (sid 711-712). Fig 12.17; ex 6-7.

Rekommenderade övningar: 1, 5, 11, 13, 23, 35, 39.

12.4. Högre partiella derivator. Beteckningar sid 715. Ex. 1. Man skall känna till och kunna använda resultatet i Th. 1. Laplaces ekvation, vågekvationen och värmelednings-ekvationen är fundamentala i tillämpningar. Se Ex 3-4 samt övning 17.

Rekommenderade övningar: 9, 15, 17.

12.5. Kedjeregeln. Kedjeregeln för $z(x(t), y(t))$ och $z(x(s, t), y(s, t))$, sid 721-722. Ex 2-3.

Observera kommentaren på nedre delen av sid 722 om matrismultiplikation. Det gör den allmänna kedjeregeln lättare att komma ihåg och förstå. (Se sid 736-737 i kap 12.6.) Se också Ex 6-7 och fig 12.21.

Kedjeregeln för högre ordningens derivator: Ex 8, 9. Hoppa över Eulers sats, Th. 2.

Rekommenderade övningar: 1, 3, 7, 15, 17, 23, 31.

12.6. Linjär approximation mm. Linjärisering och linjär approximation, sid 731-732, Ex. 1. (Högre ordningens approximationer fås från Taylors formel i kap 12.9.)

Idén med differentierbarhet (Def 6) är att det skall finnas ett tangentplan. Th. 4 ger enkla villkor för detta.

I Ex 3 visas hur man med hjälp av differentialer kan göra approximationer.

På sid 736-737 formuleras den allmänna kedjeregeln. Man skall känna till Jacobimatrisen. Den kommer senare att dyka upp i samband med variabelbyte i dubbel- och trippelintegraler.

Rekommenderade övningar: 1, 7, 13, 15, 17.

12.7. Gradient och riktningsderivata. Definition av gradient (def 7); tolkning av densamma som normal: Th. 6 och Ex 1.

Riktningsderivata (def 8) och beräkning av denna med hjälp av gradienten: Th. 7 och Ex 2. Se också sid 746: "Rates perceived by ... ".

I rutan längst ned på sid 743 ges en viktig annan tolkning av gradienten: *den riktning som representerar den största förändringen*; Ex 3.

På sid 747-748 behandlas tre dimensioner och det är helt analogt. Observera dock Ex 6-7, fig. 12.25 och kommentaren i rutan nedanför.

Rekommenderade övningar: 1, 5, 11, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 27.

12.8. Implicita funktioner. I det här avsnittet diskuteras allmänna villkor på ekvationssystem som garanterar existensen av lösningar som är differentierbara funktioner (Theorem 8). Figuren på 12.26 visar hur det fungerar i två dimensioner.

Rekommenderade övningar: 1, 3, 7, 11, 13, 15, 17, 23.

12.9. Taylors formel mm. Taylorpolynom (nedre rutan sid 763); approximation. Ex 1-2. Under föreläsningarna behandlas främst Taylors formel av ordning 2. Detta med tanke på andraderivatetestet (§13.1) som används vid karakterisering av kritiska punkter.

Rekommenderade övningar:

Kapitel 13. Tillämpningar av partiella derivator.

13.1. Extremvärden. Vid bestämning av största och minsta värde behövs några begrepp från kap. 10.1. Randpunkt, inre punkt, yttre punkt... enl definitioner på sid 602. Det är viktigt att man, åtminstone i enklare fall, förstår dessa begrepp.

Th. 1 visar att extremvärden bestäms ungefär som i en dimension, men det är mer krävande. Man måste kolla fler derivator och analysen av en funktion på randen, en eller flera kurvor i två dimensioner, är förstås besvärligare.

Ex 1-4.

I fig 13.1-13.3 ser man vad som händer i extrempunkter för olika andragradsytor (jfr kap 10.5). Genom Taylors formel kan många fall återföras till denna situation. Det är helt analogt med hur man i en variabel med hjälp av andraderivatan kan avgöra karaktären till en extrempunkt. Idén framgår tydligt i Ex 5.

Genom kvadratkomplettering får man Th. 3. I Ex 6 behandlas Ex 5 igen men utgående från Th. 3.

Tyvärr fungerar inte Th. 3 för tre eller fler variabler. Man dock kan alltid, i godtycklig dimension, titta på andraderivatorna direkt. Se avsnittet om kvadratiska former (quadratic forms), sid 776-778.

De kriterier som diskuteras på sid 778 kan uttryckas enklare med hjälp av matrisens egenvärden. Att Q är positivt definit betyder att samtliga egenvärden är > 0. Att Q är indefinit betyder att det finns egenvärden med olika tecken. Detta gäller i godtycklig dimension.

Rekommenderade övningar: 1, 3, 9, 17, 19, 21, 23, 27.

13.2. Största och minsta värden. Läs ex 1-2 (direkta tillämpningar av Th. 1). Hoppa över avsnittet om linjär programmering.

Rekommenderade övningar: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.

13.3. Lagrangemultiplikatorer Även om man i många exempel kan behandla problem med bivillkor 'direkt', är det ofta enklare med Lagranges metod, Th. 4. Idén illustreras i figur 13.14.

Rekommenderade övningar: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 19.

Kapitel 14. Multipelintegraler.

14.1. Dubbelintegraler. Dubbelintegralen införs som gränsvärde av Riemannsummor ungefär som i en dimension. Motivering är att beräkna volymen under en (positiv) funktion f på D. Speciellt får man för $f = 1$ arean av D.

Rekommenderade övningar: 1, 13, 15, 17.

14.2. Dubbelintegraler och upprepad integration. Genom upprepad integration får man en metod att beräkna dubbelintegraler (Th. 2). Figur 14.13 förklarar varför metoden fungerar. Det är viktigt att från en figur kunna finna gränserna i de upprepade integralerna. Läs Ex 1-2.

För att kunna explicit beräkna en dubbelintegral måste man hitta en primitiv funktion. Det kan därför spela roll i vilken ordning man utför den upprepade integrationen. Se Ex 3.

Rekommenderade övningar: 5, 9, 11, 13, 15, 19, 23, 27.

14.3. Generaliserade dubbelintegraler och upprepad integration. Dessa utförs, som i envariabelsfallet, via gränsvärden. Se Ex 1 och Ex 3. Hoppa över resten av avsnittet.

Rekommenderade övningar: 1, 3, 7.

14.4. Dubbelintegraler i polära koordinater. Formeln för areaelementet i polära koordinater är viktig och användbar:

$$dx\,dy = dA = r\,dr\,d\theta$$

Läs Ex 1 och Ex 3. Ex 4 är klassisk (normalfördelningen).

Formeln för (ett allmänt) variabelbyte i en dubbelintegral, Th. 4, är viktig. Memorera den den på formen

$$dxdy = dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Ex 7-8.

Rekommenderade övningar: 3, 9, 17, 25, 29, 33.

14.5. Trippelintegraler. Trippelintegraler införs och beräknas helt analogt med dubbelintegraler. Denna gång fås volymen vid integration av funktionen 1. Läs Ex 2 och Ex 4.

Rekommenderade övningar: 3, 5, 9, 15, 27.

14.6. Variabelbyte i trippelintegraler. Helt analogt med avsnitt 14.4. Notera speciellt *cylindriska koordinater* (polära koordinater tillsammans med z), sid 856-857,

$$dx\,dy\,dz = dV = rdr\,d\theta\,dz$$

och *sfäriska koordinater*. Dessa definieras på sid 859, och genom fig 14.41. De kan ses som en tredimensionell motsvarighet till polära koordinater. Volymselementet är

$$dx\,dy\,dz = dV = \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$

Ex 2-3.

Rekommenderade övningar: 1, 15, 17, 21, 25, 29.

14.7. Tillämpningar av multipelintegraler. Observera att ytelementet dS (sid 865) är helt analogt med båglängdselementet i en variabel. I stället för $ds = \sqrt{1+(y')^2}$ har vi nu $dS = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}$. Fig 14.45 ger en geometrisk förklaring. Det är redan nu värt att notera att $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}$ är längden av den, onormaliserade, normalvektorn till ytan, $\hat{\mathbf{N}} = \pm(-z'_x, -z'_y, 1)$.

Rekommenderade övningar: 1, 3, 7, 9.

Kapitel 8. Kurvor, båglängd mm.

8.1. Repetition från linalg/självstudier.

8.2-8.3 t.o.m. Example 3. Dessa avsnitt är av orienterande karaktär. Man skall främst lära sig att handskas med kurvor med allmän parameter.

8.2. Parametrisk kurva, def. 4. Kurva i planet, def 5. Ex 1-7.

Rekommenderade övningar: 1, 9, 15.

8.3. Sats 1, Ex. 1-3. Tangent och normal till plana kurvor.

Rekommenderade övningar: 5, 9, 17.

8.4 t.o.m. Example 2. Båglängdsformeln, sid 500. Dess förklaring i fig. 8.28 (Pythagoras sats). Ex. 1-2. (Areaberäkningar utförs senare med hjälp av Greens formel i kap 16.3.)

Rekommenderade övningar: 1, 3, 9.

8.5. Polära koordinater (igen), sid. 506. Ex 1-2. Hoppa över fr o m rubriken "Some Polar Curves".

Rekommenderade övningar: 3, 9, 13.

Kapitel 11. Vektorfunktioner och kurvor i rummet.

11.1. Viktiga begrepp: position, hastighet (velocity) och acceleration för en kurva (sid. 646-648). Notera att de alla tre är vektorer. Begreppet fart (speed) står för längden av hastighetsvektorn. Det är således en vanlig funktion (en "skalär").

Läs Ex. 1-5.

Rekommenderade övningar: 3, 9, 15, 17.

11.3. Det är viktigt att förstå att en kurvas hastighet och fart osv beror på parametriseringen. Man kan genomlöpa en viss kurva olika snabbt.

En kurvas båglängd införs på samma sätt i två och tre dimensioner. Som funktion är båglängden en primitiv funktion till kurvans fart. Konsekvensen är att om man väljer båglängden själv som parameter får kurvan konstant fart 1. Läs Ex. 1-4.

Rekommenderade övningar: 1, 5, 13, 17.

11.4-11.5. Du läser endast de delar som behandlar begreppet krökning.

Rekommenderade övningar: 11.4: 1, 3. 11.5: 1, 3.

Kapitel 15. Vektorfält.

15.1. Detta avsnitt, som handlar om vektorfält, är snarast en orientering inför senare studier av linje- och flödesintegraler. Läs t.o.m. Example 5.

Rekommenderade övningar: 1, 3, 9.

15.2. t.o.m. sid 884. Begreppen konservativt fält och potentialfunktion är viktiga (Def. 1). Kriterierna för att fält skall vara konservativa på sid. 884 dyker upp mer naturligt i kap. 16 i samband med Greens och Stokes' formler. De kan lättare uttryckas så att matrisen med $\mathbf{F}$:s derivator skall vara symmetrisk.

Läs Ex. 3-4 där man bestämmer potentialfunktioner. Ex. 5 är mer subtilt.

Rekommenderade övningar: 1, 3, 7, 9.

15.3. Läs Ex. 1-2 som exempel på hur man integrerar funktioner m.a.p. båglängd. En tolkning av $\int_C f\,ds$ är arean av ett staket, där C är basen (tomtgränsen), och f höjden.

Rekommenderade övningar: 1, 5, 7.

15.4. Linjeintegralen motiveras genom arbete = kraft × sträcka. Dess definition och olika sätt att skriva integralen framgår av rutan på sid. 897. Läs Ex. 1 och 2.

Hoppa över "connected and simply connected domains". Vad som är relevant i de flesta situationer är huruvida man för ett fält med en singularitet (Ex 5 i 17.2) omsluter singulariteten.

Sats 1, sid. 901, om oberoende av väg, är viktig. T ex kan man, för ett konservativt fält, välja en annan, lättare, integrationsväg. Obs den översta rutan på sid 902: om man har bestämt en potentialfunktion så är linjeintegralen skillnaden mellan potentialfunktionens värden i änd- och begynnelsepunkterna.

Läs Ex 3 och 4.

Rekommenderade övningar: 1, 3, 7, 11.

15.5. I detta avsnitt behandlas ytintegraler av masstyp. Om S är en yta i rummet och $f(x, y, z)$ är en reellvärd funktion som anger ytans densitet i punkten (x, y, z) s är $\int\int_S f(x, y, z)\,dS$ = massan hos S.

Rekommenderade övningar: 1, 3, 7, 15, 17.

15.6. Normal, orientering: se fig. 15.26. Flöde(sintegral): Def. 6. För flödesintegraler över funktionsytor används resultatet i rutan längst ned på sid 922.

Läs Ex. 4.

Rekommenderade övningar: 1, 7, 9, 13.

Kapitel 16. Vektoranalys.

16.1 Divergens och rotation (curl): övre rutan på sid 928. Gradienten, sid 927, känner vi till sedan tidigare.

Det är viktigt att göra klart för sig hur operationerna fungerar: grad är definierad för funktioner och ger vektorer. div är definierad för vektorer och ger funktioner (skalärer), medan rotationen är definierad för vektorer och ger vektorer. Theorem 1 och 2 är viktiga illustrationer av begreppen divergens och rotation.

Rekommenderade övningar: 1, 3, 9.

16.3. Huvudresultatet är Greens formel, Th. 6. Observera att formeln inte gäller för kurvor i planet som inte är slutna.

Observera ytformeln i Ex. 1. Läs också Ex. 2.

Exempel 3 illustrerar återigen att speciella effekter uppstår för vektorfält med singulariteter. Poängen är att fältet är singulärt i origo och att, om man går runt denna punkt, får man ett bidrag, nämligen 2π.

Divergenssatsen, Th. 7, får man lätt från Greens formel. De är ekvivalenta. Skillnaden är att man i Greens formel använder randkurvans tangent, och i divergenssatsen normalen till randkurvan. Om den orinterade tangenten är (T_1, T_2), saa är den utåtriktade normalen $(T_2, -T_1)$.

Rekommenderade övningar: 1, 3, 5, 7.

16.4. Det viktiga resultatet är divergenssatsen, Gauss' formel, i Th. 8. Läs Ex. 1-5.

Vi skall inte använda de vektorversioner som nämns i Th. 9.

Rekommenderade övningar: 1, 5, 9, 11, 13.

16.5 Stokes' sats (Theorem 10) är en viktig generalisering av Grenns sats då man integrerar över en kurva i rummet.