



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1901 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
TISDAGEN DEN 24:e NOVEMBER 2015 KL 08.00–10.00.

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare.

För tillgodoräkning krävs att minst 3 av de 5 deluppgifterna är korrekt lösta. Svara med minst 3 signifikanta siffrors noggrannhet! Svara endast med numeriska svar på den streckade linjen!

Efternamn:

Förnamn:

Personnummer:

Uppgift 1

Vid tillverkning av en elektrisk komponent kan de två felen A och B uppträda. Sannolikheten att komponenten har fel A är 0.2 och sannolikheten att komponenten har båda felen är 0.1. Vidare är sannolikheten att komponenten är felfri 0.6. Bestäm den betingade sannolikheten att komponenten har fel B givet att den inte har fel A .

Svar:

.....

Uppgift 2

Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}}, & \text{för } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Bestäm konstanten c så att f_X blir en täthetsfunktion och beräkna sedan $P(X > 3)$. Du behöver bara ange sannolikheten i svaret (alltså inte c).

Svar:

.....

Uppgift 3

Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler som båda kan anta värdena 1 eller 2. Vidare gäller att $p_X(1) = p_Y(2) = 0.4$. Bestäm $P(X + Y = 3)$.

Svar:

.....

Uppgift 4

För de stokastiska variablerna X och Y gäller att $V(X) = 1$, $V(Y) = 2$ och $V(2X - Y + 4) = 3$. Bestäm $C(X, Y)$.

Svar:

.....

Uppgift 5

Sannolikheten för att få vinst i en omgång av spelet Keno-5 är 0.14. Om man spelar en omgång Keno-5 varje dag och startar på en måndag, vad är sannolikheten att man vunnit något senast på torsdagen?

Svar:

.....

Lycka till!

Lösningsförslag:**Uppgift 1**

Vi vet att $P(A) = 0.2$ och att $P(A \cap B) = 0.1$. Dessa båda påståenden implicerar att $P(A \cap B^*) = P(A) - P(A \cap B) = 0.1$. Vi vet vidare att $P(A^* \cap B^*) = 0.6$ och eftersom $P(A^*) = 1 - P(A) = 0.8$ så är $P(A^* \cap B) = P(A^*) - P(A^* \cap B^*) = 0.2$. Vi söker den betingade sannolikheten $P(B | A^*)$ och den ges, per definition, av

$$P(B | A^*) = \frac{P(A^* \cap B)}{P(A^*)} = \frac{0.2}{0.8} = \underline{0.25}.$$

Uppgift 2

Eftersom X är definierad på intervallet $[0, 4]$, så blir f_X en täthetsfunktion om $\int_0^4 f_X(x) dx = 1$. Detta ger ekvationen

$$1 = \int_0^4 \frac{c}{\sqrt{x}} dx = [2c\sqrt{x}]_0^4 = 2c\sqrt{4} = 4c,$$

med lösningen $c = 1/4$. Sannolikheten $P(X > 3)$ ges nu av

$$P(X > 3) = \int_3^4 f_X(x) dx = \int_3^4 \frac{1}{4\sqrt{x}} dx = \left[\frac{\sqrt{x}}{2} \right]_3^4 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = \underline{0.134}.$$

Uppgift 3

Då variablerna endast kan anta värdena 1 eller 2 gäller att

$$p_X(1) = p_Y(2) = 0.4 \Rightarrow p_X(2) = p_Y(1) = 0.6.$$

Vi får sålunda, då X och Y är oberoende,

$$\begin{aligned} P(X + Y = 3) &= P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) \\ &= p_{X,Y}(1, 2) + p_{X,Y}(2, 1) \\ &= p_X(1)p_Y(2) + p_X(2)p_Y(1) \\ &= 0.4^2 + 0.6^2 \\ &= \underline{0.52}. \end{aligned}$$

Uppgift 4

Genom att tillämpa uttrycket för variansen för en linjärkombination (alternativt kovariansens bilinjäritet) erhålls

$$V(2X - Y + 4) = 4V(X) + V(Y) - 4C(X, Y).$$

Vi löser ur ovan samband ut $C(X, Y)$ enligt

$$\begin{aligned} C(X, Y) &= \frac{1}{4} (4V(X) + V(Y) - V(2X - Y + 4)) \\ &= \frac{1}{4} (4 \cdot 1 + 2 - 3) \\ &= \underline{0.75}. \end{aligned}$$

Uppgift 5

Låt X vara antalet omgångar med vinst under måndag till torsdag. Den sökta sannolikheten ges sålunda av $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$, och då X är binomialfördelad med $n = 4$ och $p = 0.14$ erhålls

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0.14^0 \cdot 0.86^4 = 0.86^4.$$

Svaret blir alltså

$$P(X \geq 1) = 1 - 0.86^4 = \underline{0.453}.$$