

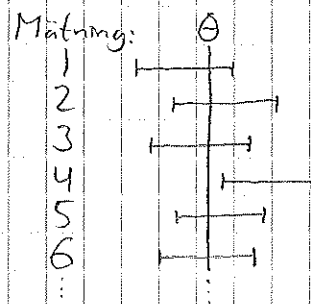
Konfidensintervall

På förra föreläsningen undersökte vi hur man från ett stickprov $x_1, \dots, x_n$ från en fördelning med okända parametrar kan uppskatta parametrarnas värden. Detta kallas punktskattning. Det är ofta av intresse att inte bara veta punktskattningen ("pH-värdet uppskattas till 5,7") utan också dess osäkerhet ("sannolikheten att pH-värdet ligger i intervallet (5,4, 6,0) är 95%"). Denna typ av intervall kallas konfidensintervall.

Def: Låt $x = (x_1, \dots, x_n)$ vara ett stickprov av $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ vars fördelning beror av en okänd parameter θ . Intervallet $I_\theta = (a_1(x), a_2(x))$ kallas ett konfidensintervall för θ med konfidensgrad $1-\alpha$ om

$$P(a_1(\mathbf{X}) < \theta < a_2(\mathbf{X})) = 1-\alpha$$

Gränserna $a_1(x)$ och $a_2(x)$ för ett konfidensintervall kan ses som utfall av stickprovsvariablerna $a_1(\mathbf{X})$ och $a_2(\mathbf{X})$. Om vi upprepar datainsamlingen och beräknar nya konfidensintervall för θ med konfidensgrad, säg, 95% så kommer 95% av konfidensintervallen att innehålla θ medan resterande intervall missar θ (exempel på detta ges i labb 2). Vanligt förekommande val av konfidensgrad $1-\alpha$ är 0,95, 0,99 och 0,999. För dessa val är risken att konfidensintervallet inte innehåller det sanna parametervärdet 5%, 1% respektive 0,1%. Om både $a_1(x)$ och $a_2(x)$ är ändliga kallas konfidensintervallet tvåsidigt, men om $a_1(x) = -\infty$ eller $a_2(x) = \infty$ kallas det ensidigt. Vi går igenom en femstegsmetod för att bestämma konfidensintervall i följande exempel.



Ex: Låt $x_1, \dots, x_n$ vara ett stickprov från $N(\mu, \sigma)$, dvs $x_1, \dots, x_n$ är observationer av de oberoende s.v. $X_1, \dots, X_n$ som alla är $N(\mu, \sigma)$ -fördelade. Vi vill bestämma ett konfidensintervall för μ med konfidensgrad $1-\alpha$ och antar att σ är känd.

1. Bestäm en punktskattning θ_{obs}^* för den parameter som vi ska ta fram ett konfidensintervall för.

En punktskattning för μ är $\mu_{obs}^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ (ML-skattningen av μ)

2. Bestäm fördelningen för punktskattningens stickprovsvariabel θ^* .

Vi vet att $\mu^* = \bar{x} \in N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, så $E(\mu^*) = \mu$ och $D(\mu^*) = \sigma/\sqrt{n}$.

3. Transformera stickprovsvariabeln θ^* till en pivotvariabel $T(\theta^*)$ vars fördelning bara beror av kända parametrar.

Den normalfördelade stickprovsvariabeln μ^* kan transformeras till en standardiserat normalfördelat s.v. enligt

4. Stäng in pivotvariabeln mellan kvantiler med rätt konfidensgrad, dvs

$$P(x_{1-\alpha/2} < T(\theta^*) < x_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

Med hjälp av kvantiler för standardiserad normalfördelning får

5. Omforma kvantilolikheten till ett konfidensintervall $I_\theta = (a_1(x), a_2(x))$.

$$T(\mu^*) = \frac{\mu^* - E(\mu^*)}{D(\mu^*)} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)$$

$$P(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \lambda_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$1-\alpha = P(-\lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = P(\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$\mu < \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu \quad \Rightarrow I_\mu = (\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Konfidensintervallets längd $2\lambda_{\alpha/2} \sigma/\sqrt{n}$ ökar om spridningen i datat är stor (stort σ), men minskar om antalet observationer är stort (stort n). Notera också att längden ökar med konfidensgraden. För $1-\alpha = 0,95$ får vi $\lambda_{\alpha/2} = 1,96$, men för $1-\alpha = 0,999$ får vi $\lambda_{\alpha/2} = 3,29$.

Ex: Låt återigen $x_1, \dots, x_n$ vara ett stickprov från $N(\mu, \sigma)$, men antag nu att σ är okänd. Vi kan välja samma punktstatistik som förut ($\mu^* = \bar{x}$), men eftersom standardavvikelsen av statistikern, $D(\mu^*) = \sigma/\sqrt{n}$ är okänd så kan vi inte använda $(\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \sigma/\sqrt{n})$ som konfidenstervall i detta fall. Vi väljer att byta ut $D(\mu^*)$ mot en punktstatistik av $D(\mu^*)$. En sådan punktstatistik kallas medelfelet av μ^* och betecknas $d(\mu^*)$. Som medelfelet väljer vi $d(\mu^*) = s/\sqrt{n}$, där s är stickprovsstandardavvikelsen

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \text{ med stickprovsvariabel } S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\text{Pivotvariabeln blir då } T(\mu^*) = \frac{\mu^* - E(\mu^*)}{d(\mu^*)} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

BILD 9 $\rightarrow$ som kan visas vara t-fördelad med $n-1$ frihetsgrader. Detta betecknas $T(\mu^*) \in t(n-1)$. Bilden visar täthetsfunktionen för t-fördelningen för några val av antal frihetsgrader. Notera att täthetsfunktionen konvergerar mot ϕ då $n \rightarrow \infty$ (då går också S mot σ). α -kvantilen för $t(n-1)$ -fördelningen betecknas $t_{\alpha/2}(n-1)$. I analogi med förra exemplet fås:

$$1-\alpha = P(-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)) = P(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}) \\ \Rightarrow I_{\mu} = (\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}})$$

BILD 10 $\rightarrow$ Notera att för konfidenegrad $1-\alpha=0,95$ och exempelvis $n=10$, så är $t_{\alpha/2}(n-1)=2,26$ medan $\lambda_{\alpha/2}=1,96$, så konfidenstervallat blir längre i fallet då σ är okänt.

Vi ska nu konstruera konfidenstervall för σ (antar att μ är känt) och behöver då ytterligare en ny fördelning.

Sats: Om $Z_1, \dots, Z_n$ är oberoende standardiserat normalfördelade s.v., så är $\bar{X} = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ χ^2 -fördelad med n frihetsgrader. Detta betecknas $\bar{X} \in \chi^2(n)$.

BILD 11 $\rightarrow$ Bilden visar täthetsfunktionen för χ^2 -fördelningen för några val av antal frihetsgrader. α -kvantilen för $\chi^2(n)$ -fördelningen betecknas $\chi^2_{\alpha}(n)$. Notera att χ^2 -fördelningen är definierad på $(0, \infty)$, så det gäller att $\chi^2_{1-\alpha/2}(n) \neq -\chi^2_{\alpha/2}(n)$ (jfr sambanden $\lambda_{1-\alpha/2} = -\lambda_{\alpha/2}$ och $t_{1-\alpha/2}(n-1) = -t_{\alpha/2}(n-1)$).

Sats: Låt $X_1, \dots, X_n$ vara oberoende $N(\mu, \sigma)$ -fördelade s.v. Då är

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \in \chi^2(n-1)$$

Ex: Bestäm ett konfidenstervall för σ . Från satsen följer att $T(\sigma^*) = (n-1)S^2/\sigma^2 \in \chi^2(n-1)$ kan användas som pivotvariabel. Med kvantilerna för $\chi^2(n-1)$ -fördelningen fås:

$$1-\alpha = P(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha/2}(n-1)) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

$$\Rightarrow I_{\sigma^2} = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \right) \text{ och } I_{\sigma} = \left(s \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, s \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} \right)$$

Följande samband gäller mellan t- och χ^2 -fördelningarna. Om $\bar{X} \in N(0,1)$ och $\bar{Y} \in \chi^2(k)$ är oberoende, så gäller $\bar{X}/\sqrt{\bar{Y}/k} \in t(k)$. För normalfördelningen så gäller det att $\bar{X}$ och S^2 är oberoende och därmed är

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \bigg/ \frac{S}{\sigma} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \bigg/ \sqrt{\frac{(n-1)S^2/\sigma^2}{n-1}} \overset{\substack{\in N(0,1) \\ \in \chi^2(n-1)}}{\in t(n-1)}, \text{ vilket vi utnyttjade i kvantil för } \mu \text{ (}\sigma \text{ känt).}$$