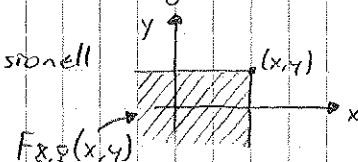


Vi avslutade förra föreläsningen med att definiera diskreta och kontinuerliga tvådimensionella s.v. Båda dessa kan beskrivas med en fördelningsfunktion.

Def: Den simultana fördelningsfunktionen för en tvådimensionell s.v. (X, Y) ges av

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$



Värdet på fördelningsfunktionen är lika med sannolikheten att värdet på (X, Y) ligger i det streckade området i figuren. Vi har följande samband

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{j \leq x} \sum_{k \leq y} p_{X,Y}(j,k) \quad \text{respektive} \quad F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u,v) dv \right) du$$

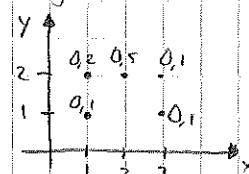
BILD 5 → Bilden visar den simultana täthetsfunktionen för en tvådimensionell normalfördelning. Båda komponenterna i en tvådimensionell s.v. (X, Y) är endimensionella s.v. Komponenternas fördelningar kallas marginalfördelningar.

Def: För diskreta s.v. (X, Y) , så ges de marginala sannolikhetsfunktionerna för X och Y av:

$$p_X(j) = \sum_k p_{X,Y}(j,k) \quad \text{och} \quad p_Y(k) = \sum_j p_{X,Y}(j,k)$$

För kontinuerliga s.v. (X, Y) så ges de marginala täthetsfunktionerna för X och Y av:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy \quad \text{och} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$$



Vi har tidigare definierat oberoende händelser A, B med hjälp av villkoret $IP(A \cap B) = IP(A)IP(B)$. På liknande sätt sägs två s.v. X och Y vara oberoende om $IP(X \in C, Y \in D) = IP(X \in C)IP(Y \in D)$ för alla mängder $C, D \subset \mathbb{R}$. Som ett exempel ska vi undersöka fördelningen för största och minsta värdet av två oberoende s.v. X och Y . Låt först $Z = \max(X, Y)$. Eftersom $Z \leq z$ om och endast om både $X \leq z$ och $Y \leq z$ så gäller:

$$F_Z(z) = IP(Z \leq z) = IP(X \leq z, Y \leq z) \stackrel{X,Y \text{ oberoende}}{=} IP(X \leq z)IP(Y \leq z) = F_X(z)F_Y(z)$$

Låt nu $Z = \min(X, Y)$. Då gäller $Z > z$ om och endast om $X > z$ och $Y > z$.

$$F_Z(z) = 1 - IP(Z > z) = 1 - IP(X > z, Y > z) \stackrel{X,Y \text{ oberoende}}{=} 1 - IP(X > z)IP(Y > z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$$

Formlerna kan lätt generaliseras till maximum och minimum av n s.v.

Ex: En motor har fyra cylindrar, vars livslängder X_i är oberoende och $\text{Exp}(1/7)$ -fördelade. Låt T beteckna den tidpunkt då motorns kapacitet minskar till följd av att en av cylindrarna gått sönder, dvs $T = \min(X_1, \dots, X_4)$

$$F_T(t) = 1 - \prod_{i=1}^4 (1 - F_{X_i}(t)) = 1 - \prod_{i=1}^4 (1 - (1 - e^{-t/7})) = 1 - (e^{-t/7})^4 = 1 - e^{-4t/7} \Rightarrow T \sim \text{Exp}(4/7)$$

Generellt gäller det att minimum av n oberoende $\text{Exp}(\lambda)$ -fördelade s.v. är $\text{Exp}(n\lambda)$ -fördelat.

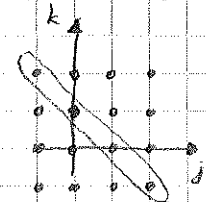
Följande sats är användbar för att avgöra om s.v. är oberoende.

Sats: Följande tre utsagor är ekvivalenta.

1. De s.v. X och Y är oberoende
2. $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$
3. $p_{X,Y}(j,k) = p_X(j)p_Y(k)$ (Om X och Y är diskreta s.v.)
 $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ (Om X och Y är kontinuerliga s.v.)

Största och minsta värdet av två oberoende s.v. X, Y kan ses som en funktion av en tvådimensionell s.v. (X, Y) . En annan sådan funktion är $Z = X + Y$. Om X och Y är diskreta, oberoende s.v., så blir sannolikhetsfunktionen för $Z = X + Y$

X och Y oberoende



$$p_Z(l) = P(X+Y=l) = \sum_{j+k=l} p_{X,Y}(j,k) = \sum_j p_{X,Y}(j, l-j) = \sum_j p_X(j) p_Y(l-j)$$

Detta kallas för faltningssformeln. För kontinuerliga s.v. finns en direkt motsvarighet i formeln $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$ (se boken) $z \in \mathbb{R}$

När vi studerade deskriptiv statistik införde vi lägesmått och spridningsmått för datamängder. Även för sannolikhetsfördelningar är dylika mått av intresse. Det vanligaste lägesmålet är väntevärdet och de vanligaste spridningsmåten är variansen och standardavvikelsen.

Def: För en diskret s.v. X ges väntevärdet av $E(X) = \sum_j j p_X(j)$ och för en kontinuerlig s.v. X ges det av $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$.

Ex: Väntevärdet för en $Po(\mu)$ -fördelad s.v. X ges av:

$$E(X) = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\mu^j}{j!} e^{-\mu} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu^j}{(j-1)!} e^{-\mu} = \mu e^{-\mu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu^{j-1}}{(j-1)!} = \mu e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} = \mu$$

Ex: Väntevärdet för en $Exp(\lambda)$ -fördelad s.v. X ges av:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[x(-e^{-\lambda x}) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

↑
partiell integration

Väntevärdet för en funktion g av en s.v. X ges av $E(g(X)) = \sum_j g(j) p_X(j)$ om X är diskret och av $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$ och X är kontinuerlig. Vi använder detta i följande definition.

Def: Låt μ beteckna väntevärdet av en s.v. X . Variansen av X ges av $V(X) = E((X-\mu)^2)$. Om X är diskret, kan $V(X)$ skrivas $\sum_j (j-\mu)^2 p_X(j)$ och om X är kontinuerlig, kan $V(X)$ skrivas $\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x) dx$. I båda fallen ges standardavvikelsen av X av $D(X) = \sqrt{V(X)}$.

Ex: Låt X beteckna antalet prickar vid ett tärningskast. Då är

$$E(X) = \sum_{j=1}^6 j \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 j = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2}$$

$$V(X) = \sum_{j=1}^6 (j - \frac{7}{2})^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right) = \frac{70}{24} \approx 2.9$$

Vid beräkning av varianser används ofta följande sats. $\Rightarrow D(X) = 1,7$

Sats: För alla s.v. X gäller $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Bevis: Vi bevisar satsen för en diskret s.v. X och beviset är analogt för kontinuerliga s.v. Låt μ beteckna $E(X)$ i beviset.

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_j (j-\mu)^2 p_X(j) = \sum_j (j^2 - 2\mu j + \mu^2) p_X(j) = \sum_j j^2 p_X(j) - 2\mu \sum_j j p_X(j) \\ &\quad + \mu^2 \sum_j p_X(j) = E(X^2) - 2\mu \mu + \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

Ex: Vi använder satsen för att bestämma variansen för en s.v. $X \in Exp(\lambda)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[x^2(-e^{-\lambda x}) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x(-e^{-\lambda x}) dx = \frac{2}{\lambda} E(X) = \frac{2}{\lambda^2} \\ \Rightarrow V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow D(X) = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

↑
partiell integration