Föreläsning 10

Thomas Önskog

28/11 2017

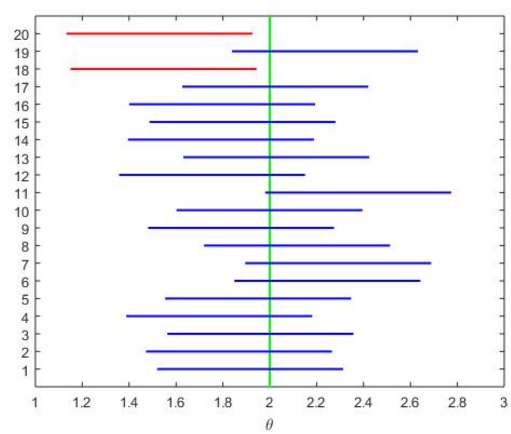
Konfidensintervall

På förra föreläsningen undersökte vi hur vi från ett stickprov $x_1, ..., x_n$ från en fördelning med okända parametrar kan uppskatta parametrarnas värden. Detta kallas punktskattning. Det är ofta av intresse att inte bara veta punktskattningen (”pH-värdet uppskattas till 5.7”), utan också få ett mått på osäkerheten i skattningen (”sannolikheten att intervallet $(5.4, 6.0)$ innehåller det sanna pH-värdet är 95%”). Denna typ av intervall kallas **konfidensintervall**.

Definition. *Låt $x = (x_1, ..., x_n)$ vara ett stickprov av $X = (X_1, ..., X_n)$ vars fördelning beror av en okänd parameter θ. Intervallet $I_\theta = (a_1(x), a_2(x))$ kallas för ett **konfidensintervall** för θ med **konfidensgrad** $1 - \alpha$ om*

$$\underline{\mathbb{P}(a_1(X) < \theta < a_2(X)) = 1 - \alpha.}$$

Notera att a_1 och a_2 är funktioner på samma sätt som θ^* på förra föreläsningen. Gränserna $a_1(x)$ och $a_2(x)$ för ett konfidensintervall kan ses som utfall av stickprovsvariablerna $a_1(X)$ och $a_2(X)$. Om vi upprepar datainsamlingen och beräknar nya konfidensintervall för θ med konfidensgrad exempelvis 95%, så kommer 95% av konfidensintervallen att innehålla θ medan resterande intervall missar θ, se figuren nedan.



Vanligt förekommande val av konfidensgrad $1-\alpha$ är 95%, 99% och 99.9%. För dessa val är risken att konfidensintervallet inte innehållet det sanna parametervärdet 5%, 1% respektive

0.1%. Om både $a_1(x)$ och $a_2(x)$ är ändliga kallas konfidensintervallet tvåsidigt, men om antingen $a_1(x) = -\infty$ eller $a_2(x) = \infty$ så kallas det ensidigt. I följande exempel går vi igenom en femstegsmetod för att bestämma konfidensintervall.

Exempel. *Låt $x_1, ..., x_n$ vara ett stickprov från $N(\mu, \sigma)$, dvs $x_1, ..., x_n$ är observationer av de oberoende s.v. $X_1, ..., X_n$ som alla är $N(\mu, \sigma)$-fördelade. Vi vill bestämma ett konfidensintervall för μ med konfidensgrad $1 - \alpha$ och antar att σ är känd.*

1. *Bestäm en **punktskattning** för den parameter som vi vill bestämma ett konfidensintervall för.*

   En punktskattning för μ är $\mu^*_{obs} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (ML-skattningen av μ).

2. *Bestäm **fördelningen den stickprovsvariabel som hör till punktskattningen**.*

   Vi vet att $\mu^* = \overline{X} \in N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, så $E(\mu^*) = \mu$ och $D(\mu^*) = \sigma/\sqrt{n}$.

3. ***Transformera stickprovsvariabeln till en pivotvariabel** vars fördelning bara beror på kända parametrar.*

   Den normalfördelade stickprovsvariabeln μ^* kan transformeras till en standardiserat normalfördelad s.v. enligt

$$\underline{T(\mu^*)} = \frac{\mu^* - E(\mu^*)}{D(\mu^*)} = \underline{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}} \in N(0, 1).$$

4. ***Stäng in pivotvariabeln mellan kvantiler** med rätt konfidensgrad.*

   Med hjälp av kvantiler för den standardiserade normalfördelningen fås

$$\underline{\mathbb{P}\Big(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \lambda_{\alpha/2}\Big) = 1 - \alpha.}$$

5. ***Omforma kvantilolikheten till ett konfidensintervall**.*

   Vi noterar att

$$-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad \Rightarrow \qquad \mu < \overline{X} + \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

   och att

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \lambda_{\alpha/2} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X} - \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu,$$

   så

$$1 - \alpha = \mathbb{P}\Big(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \lambda_{\alpha/2}\Big) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\overline{X} - \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{a_1(X)} < \mu < \underbrace{\overline{X} + \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{a_2(X)}\Big)$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{I_\mu = (a_1(x), a_2(x)) = \Big(\overline{x} - \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big).}$$

Konfidensintervallets längd $2\lambda_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ ökar om spridningen i datat är stor (stort σ), men minskar om antalet observationer n är stort. Notera också att längden ökar med konfidensgraden. För $1-\alpha = 95\%$, så är $\lambda_{\alpha/2} = 1.96$, men för $1-\alpha = 99.9\%$, så är $\lambda_{\alpha/2} = 3.29$.

Exempel. *Låt återigen $x_1, ..., x_n$ vara ett stickprov från $N(\mu, \sigma)$. Vi vill bestämma ett konfidensintervall för μ, men nu under antagandet att σ är okänd. Vi kan välja samma punktskattning som förut ($\mu^*_{obs} = \overline{x}$), men eftersom standardavvikelsen av skattningen, $D(\mu^*) = \sigma/\sqrt{n}$ är okänd, så kan vi inte använda $(\overline{x} - \lambda_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \overline{x} + \lambda_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n})$ som konfidensintervall i detta fall (intervallets gränser är okända).*

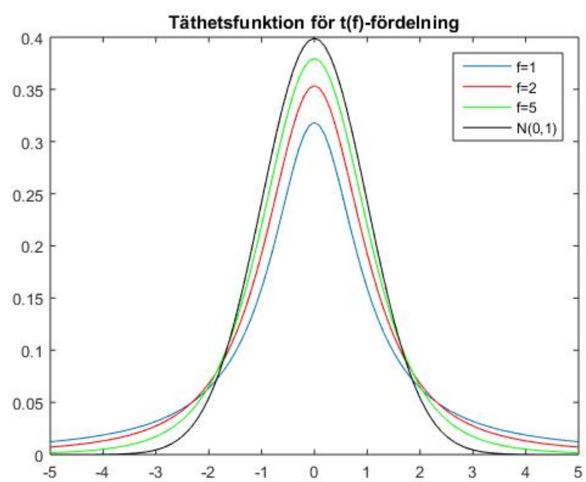
*Vi väljer att byta ut $D(\mu^*)$ mot en punktskattning av $D(\mu^*)$. En sådan punktskattning kallas **medelfelet** av μ^* och betecknas $d(\mu^*)$. Som medelfelet väljer vi*

$$\underline{d(\mu^*) = \frac{s}{\sqrt{n}},} \qquad \text{där} \qquad \underline{s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.}$$

Motsvarande stickprovsvariabel är $\underline{S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}}$. Pivotvariabeln blir

$$\underline{T(\mu^*)} = \frac{\mu^* - E(\mu^*)}{d(\mu^*)} = \underline{\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}},$$

*som kan visas vara t-**fördelad** med $n-1$ **frihetsgrader**. Detta betecknas $T(\mu^*) \in t(n-1)$. Bilden nedan visar täthetsfunktionen för t-fördelningen för några val av antal frihetsgrader. Notera att täthetsfunktionen konvergerar mot φ då $n \to \infty$ (detta är konsistent med att $S \to \sigma$, då $n \to \infty$). α-kvantilen för $t(n-1)$-fördelningen betecknas $t_\alpha(n-1)$.*



I analogi med föregående exempel fås

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \mathbb{P}\Big(-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\underbrace{\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}}_{a_1(X)} < \mu < \underbrace{\overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}}_{a_2(X)}\Big) \end{aligned}$$

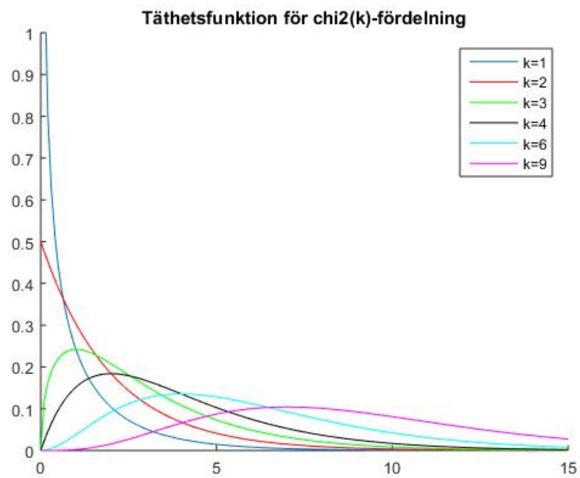
$$\Rightarrow \qquad \underline{I_\mu = (a_1(x), a_2(x)) = \Big(\overline{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\Big).}$$

Notera att för konfidensgrad $1-\alpha = 95\%$ och exempelvis $n = 10$, så är $t_{\alpha/2}(n-1) = 2.26$, medan $\lambda_{\alpha/2} = 1.96$, så konfidensintervallet blir längre i fallet då σ är okänd.

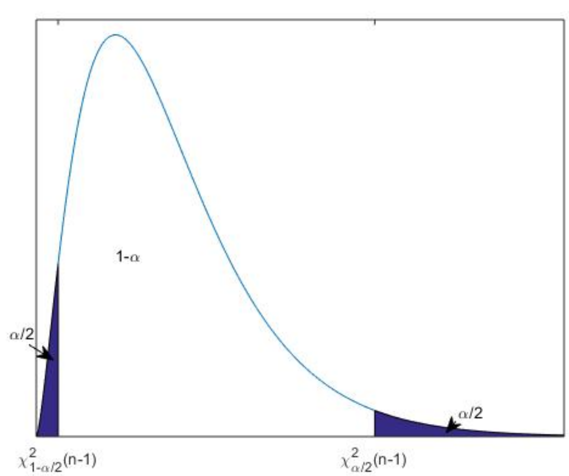
Vi ska nu konstruera konfidensintervall för σ (vi antar att även μ är okänt) och behöver då ytterligare en ny fördelning.

Sats. *Om $Z_1, ..., Z_n$ är oberoende standardiserat normalfördelade s.v., så är $X = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ χ^2-**fördelad** med n **frihetsgrader**. Detta betecknas $X \in \chi^2(n)$.*

Bilden nedan visar täthetsfunktionen för χ^2-fördelningen för några val av antal frihetsgrader. α-kvantilen för $\chi^2(n)$-fördelningen betecknas $\chi^2_\alpha(n)$.



Notera att χ^2-fördelningen är definierad på $(0, \infty)$, så det gäller att $\chi^2_{1-\alpha/2}(n) \neq -\chi^2_{\alpha/2}(n)$ (jfr. sambanden $\lambda_{1-\alpha/2} = -\lambda_{\alpha/2}$ och $t_{1-\alpha/2}(n-1) = -t_{\alpha/2}(n-1)$).



Sats. *Låt $X_1, ..., X_n$ vara oberoende $N(\mu, \sigma)$-fördelade s.v.. Då är*

$$\underline{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \in \chi^2(n-1).}$$

Exempel. *Låt återigen $x_1, ..., x_n$ vara ett stickprov från $N(\mu, \sigma)$. Vi vill bestämma ett konfidensintervall för σ. Från satsen ovan följer att*

$$\underline{T(\sigma^*) = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2} \in \chi^2(n-1),$$

kan användas som pivotvariabel. Med kvantilerna för $\chi^2(n-1)$-fördelningen fås

$$1 - \alpha = \mathbb{P}\Big(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\Big)$$

Vi noterar att

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},$$

och att

$$\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2,$$

så

$$1-\alpha = \mathbb{P}\Big(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\Big) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}_{a_1(X)} < \sigma^2 < \underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}_{a_2(X)}\Big).$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{I_{\sigma^2} = (a_1(x), a_2(x)) = \Big(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\Big).}$$

Ett konfidensintervall för σ fås av $\underline{I_\sigma = \Big(s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\Big)}$.

Följande samband gäller mellan t- och χ^2-fördelningarna. Om $X \in \mathrm{N}(0,1)$ och $Y \in \chi^2(f)$ är oberoende, så gäller det att

$$\frac{X}{\sqrt{Y/f}} \in t(f).$$

För normalfördelningen gäller det att $\overline{X}$ och S^2 är oberoende och därmed följer

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big/\frac{S}{\sigma} = \underbrace{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\in \mathrm{N}(0,1)}\Big/\sqrt{\underbrace{\frac{(n-1)S^2/\sigma^2}{n-1}}_{=\frac{Y}{n-1},\ \text{där } Y \in \chi^2(n-1)}} \in t(n-1).$$

Det var detta resultat som vi utnyttjade när vi konstruerade pivotvariabeln för μ i fallet med okänt σ.