

Sats (Multiplikationsprincipen). Antalet sätt att utföra k operationer, där operation i kan utföras på n_i sätt, är

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k.$$

Antalet sätt vi kan välja ut k element bland n distinkta. (Sats 2.8–2.11)

	Med Återläggning	Utan Återläggning
Med Ordningshänsyn	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Utan Ordningshänsyn	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

MÅ/MO uppenbar.

Exempel: Antalet bankomatkoder. $n = 10$ siffror väljs med återläggning $k = 4$ gånger med hänsyn till ordning. Totalt antal koder $n^k = 10^4 = 10000$, dvs talen 0000 till 9999.

UÅ/MO:

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n(n-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdots 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Exempel: Antalet kortblandningar. Välj $k = 52$ kort av $n = 52$ möjliga utan återläggning med hänsyn till ordning.

$$\begin{aligned} \frac{52!}{(52-52)!} &= \frac{52!}{0!} = 52! \\ &= 80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766\,975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000 \end{aligned}$$

UÅ/UO: Beteckna talet med ${}_nC_k$. Ordna mängden för att få UÅ/MO:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k! {}_nC_k \Rightarrow {}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Talet

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

(utläses ” n över k ”) kallas *binomialkoefficient* och förekommer flitigt i kursen. Tolkningen av det är antalet sätt som man kan välja ut k element bland n distinkta, utan återläggning och utan hänsyn till ordning (tag dem i klump). Fallet MÅ/UO visas inte.

Exempel: Antal Lottorader $\binom{35}{7} = 6\,724\,520$.

Exempel: Antalet olika pizzabeställningar en grupp om 5 personer kan göra (menyn har 40 olika pizzor) är $\binom{40-1+5}{5} = 1\,086\,008$.

Betingad sannolikhet (2.5)

Hur påverkar information om att en händelse inträffat sannolikheterna för att andra händelser gör det?

Introduktion: SPAM-filtrering. $n = 348$ mejl undersöks. Låt

$$A = \{\text{”SPAM”}\} \quad B = \{\text{”innehåller texten Subject.*FREE.*”}\}$$

Data sammanfattas i tabellen

	A	A^*	
B	17	1	18
B^*	172	158	330
	189	159	348

Det finns ett samband mellan om ett mejl är SPAM och det innehåller texten "Subject.*FREE.*" eller ej.

För ett på måfå valt mejl har vi

$$P(A) = \frac{189}{348} = 0.543 \quad P(B) = \frac{18}{348} = 0.0517.$$

Givet information om att ett mejl innehåller texten "Subject.*FREE.*" har vi istället

$$P(A|B) = \frac{17}{18} = 0.9444 \neq P(A) = 0.543$$

Definition: Låt A, B vara två händelser med $P(B) > 0$. Då definierar vi att sannolikheten för A betingat B ("A givet B"), $P(A|B)$, som

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Om händelsen B inte påverkar sannolikheten för att A inträffar så har vi $P(A|B) = P(A)$ och/eller $P(B|A) = P(B)$. Uttryckt med hjälp av definitionen av betingade sannolikheter

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

vilket leder det oss till definitionen:

Definition: A och B är oberoende om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

OBS Oförenliga (disjunkta) händelser är **ej** oberoende!

Anmärkning. Om A och B är oberoende så är A och B^* oberoende och A^* och B^* oberoende.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^*) = P(A)P(B) + P(A \cap B^*).$$

Alltså är

$$P(A \cap B^*) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^*),$$

vilket visar oberoendet mellan A och B^* . Upprepas resonemanget fås att A^* och B^* är oberoende.

Sats (Lagen om total sannolikhet, (2.5)). Låt $B_1, B_2, \dots, B_n$ vara en partition av Ω , dvs $B_i \cap B_j = \emptyset$ då $i \neq j$, och $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Vidare, $P(B_i) > 0$ och låt A vara en händelse. Då kan A delas in i disjunkta delar, $A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)$, och

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

Ur definitionen för betingning får vi att sannolikheten för snitthändelsen kan beräknas på två sätt:

$$P(A \cap B) = \begin{cases} P(A|B)P(B) \\ P(B|A)P(A) \end{cases}$$

Alltså kan vi räkna ut

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}. \quad (1)$$

Om vi omformulerar $P(A)$ med lagen om total sannolikhet får vi Bayes sats.

Sats (Bayes sats (2.6)). Under samma antaganden som i 2.5

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Exempel (Sjukdomsdiagnostik): I detta konstruerade exempel låt $A = \{\text{"Diagnos sjuk"}\}$ och $B = \{\text{"Patient sjuk"}\}$.

$$P(B) = 0.01 \quad P(A|B) = 0.80 \quad P(A^*|B^*) = 0.95.$$

Rita träd!

$$P(A \cap B) = 0.008 \quad P(A^* \cap B) = 0.002 \quad P(A \cap B^*) = 0.0495 \quad P(A^* \cap B^*) = 0.9405$$

Då är

$$P(\{\text{"fel diagnos"}\}) = P(A \cap B^*) + P(A^* \cap B) = 0.0515,$$

dvs sämre än om man friskförklarade alla patienter. Vidare

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^*)P(B^*)} = \frac{0.008}{0.008 + 0.0495} = 0.139.$$

$$P(B|A^*) = \frac{0.002}{0.002 + 0.9405} = 0.002122,$$

och det är den sista sannolikheten som vi verkligen vill vara säkra på är liten.