Vi vet sedan tidigare att för en stokastisk variabel X och konstanter a och b gäller

$$\mathsf{E}\left[aX+b\right]=a\mathsf{E}\left[X\right]+b$$

och

$$\mathrm{V}\left(aX+b\right)=\mathrm{V}\left(aX\right)=a^2\mathrm{V}\left(X\right).$$

Sats. Låt X och Y vara två stokastiska variabler. Då är

$$\mathsf{E}\left[X+Y\right]=\mathsf{E}\left[X\right]+\mathsf{E}\left[Y\right].$$

Vi bevisar det diskreta fallet.

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[X+Y\right] &= \sum_{x\in S_X}\sum_{y\in S_Y}(x+y)\mathsf{P}\left(X=x,Y=y\right)\\ &= \sum_{x\in S_X}x\sum_{y\in S_Y}\mathsf{P}\left(X=x,Y=y\right)+\sum_{y\in S_Y}y\sum_{x\in S_X}\mathsf{P}\left(X=x,Y=y\right)\\ &= \sum_{x\in S_X}x\mathsf{P}\left(X=x\right)+\sum_{y\in S_Y}y\mathsf{P}\left(Y=y\right)=\mathsf{E}\left[X\right]+\mathsf{E}\left[Y\right].\end{aligned}$$

Sats. Om X och Y är två oberoende stokastiska variabler är

$$\mathsf{E}\left[XY\right]=\mathsf{E}\left[X\right]\mathsf{E}\left[Y\right]$$

Bevis: Här bevisas det diskreta fallet:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[XY\right] &= \sum_k\sum_n kn\mathsf{P}\left(X=k,Y=n\right)=\sum_k\sum_n kn\mathsf{P}\left(X=k\right)\mathsf{P}\left(Y=n\right)\\ &= \underbrace{\sum_k k\mathsf{P}\left(X=k\right)}_{=\mathsf{E}[X]}\underbrace{\sum_n n\mathsf{P}\left(Y=n\right)}_{=\mathsf{E}[Y]}=\mathsf{E}\left[X\right]\mathsf{E}\left[Y\right]\end{aligned}$$

Beräkningsformel för varianser:

Sats.

$$\mathrm{V}\left(X\right)=\mathsf{E}\left[X^2\right]-\left(\mathsf{E}\left[X\right]\right)^2.$$

Bevis: Med beteckningen $m=\mathsf{E}\left[X\right]$ har vi

$$\begin{aligned}\mathrm{V}\left(X\right) &= \mathsf{E}\left[(X-m)^2\right]=\mathsf{E}\left[X^2-2mX+m^2\right]\\ &= \mathsf{E}\left[X^2\right]-2m\mathsf{E}\left[X\right]+m^2=\mathsf{E}\left[X^2\right]-m^2=\mathsf{E}\left[X^2\right]-\left(\mathsf{E}\left[X\right]\right)^2.\end{aligned}$$

Satsen används även ofta för att beräkna $\mathsf{E}\left[X^2\right]$ från $\mathrm{V}\left(X\right)$ och $\mathsf{E}\left[X\right]$ i bevis.

Exempel: Area av kvadrat och rektangel: Låt X_1 och X_2 vara två oberoende sidlängder, likformigt fördelade på intervallet $[0,1]$. Då är

$$\mathsf{E}\left[X\right]=\frac{1}{2}\qquad \mathrm{V}\left(X\right)=\frac{1}{12}.$$

Vidare så är

$$\mathsf{E}\left[\text{Area rektangel}\right]=\mathsf{E}\left[X_1\cdot X_2\right]=\{\text{oberoende}\}=\mathsf{E}\left[X_1\right]\mathsf{E}\left[X_2\right]=\frac{1}{4}.$$

medan

$$\mathsf{E}\left[\text{Area kvadrat}\right] = \mathsf{E}\left[X_1^2\right] = \mathrm{V}\left(X_1^2\right) + \mathsf{E}\left[X_1\right]^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \geq m^2.$$

Låt (X, Y) vara en tvådimensionell stokastisk variabel och beteckna $m_X = \mathsf{E}[X]$ och $m_Y = \mathsf{E}[Y]$. Då är

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(X+Y) &= \mathsf{E}\left[(X+Y-\mathsf{E}[X+Y])^2\right] = \mathsf{E}\left[(X-m_X+Y-m_Y)^2\right] \\
&= \mathsf{E}\left[(X-m_X)^2 + (Y-m_Y)^2 + 2(X-m_X)(Y-m_Y)\right] \\
&= \mathsf{E}\left[(X-m_X)^2\right] + \mathsf{E}\left[(Y-m_Y)^2\right] + 2\mathsf{E}\left[(X-m_X)(Y-m_Y)\right] \\
&= \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2\mathrm{C}(X,Y).
\end{aligned}$$

Definition: Kovariansen mellan två stokastiska variabler X och Y definieras och betecknas

$$\mathrm{C}(X,Y) = \mathsf{E}\left[(X-m_X)(Y-m_Y)\right].$$

Variabeln

$$(X-m_X)(Y-m_Y)$$

mäter om X och Y tenderar att variera åt samma eller motsatt håll. Om X är stor/liten (relativt m_X) och Y samtidigt är stor/liten (relativt m_Y) så är kovariansen positiv eftersom $+\cdot+=+$ och $-\cdot-=+$. Analogt, om X och Y varierar åt motsatt håll är kovariansen negativ, $+\cdot-=-$ och $-\cdot+=-$. Kovariansen mäter *linjär* samvariation.

Korrelationen (korrelationskoefficienten) är det dimensionslösa linjära samvariationsmåttet. Den definieras och betecknas

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{C}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)\,\mathrm{V}(Y)}} = \frac{\mathrm{C}(X,Y)}{\mathrm{D}(X)\,\mathrm{D}(Y)}.$$

Korrealtionskoefficienten uppfyller alltid

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

och $|\rho_{X,Y}| = 1$ om och endast om $Y = aX + b$.

Med linjäriteten hos väntevärden har vi även följande beräkningsformel (jämför med Steiners sats för varianser)

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}(X,Y) &= \mathsf{E}\left[(X-m_X)(Y-m_Y)\right] = \mathsf{E}\left[XY - m_XY - m_YX + m_Xm_Y\right] \\
&= \mathsf{E}[XY] - m_X\mathsf{E}[Y] - m_Y\mathsf{E}[X] + m_Xm_Y = \mathsf{E}[XY] - m_Xm_Y.
\end{aligned}$$

Kovariansen är en bilinjär operator

$$\mathrm{C}(aX+b,Y) = \mathrm{C}(aX,Y) = a\mathrm{C}(X,Y)$$

för konstanter a och b, och för stokastiska variabler X, Y och Z är

$$\mathrm{C}(X,Y) = \mathrm{C}(Y,X) \qquad \mathrm{C}(X+Z,Y) = \mathrm{C}(X,Y) + \mathrm{C}(Z,Y)$$

Notera även att

$$\mathrm{C}(X,X) = \mathsf{E}\left[(X-m_X)(X-m_X)\right] = \mathsf{E}\left[(X-m_X)^2\right] = \mathrm{V}(X).$$

För två oberoende stokastiska är kovariansen variabler

$$\mathrm{C}(X,Y) = \mathsf{E}[XY] - m_Xm_Y = \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y] - m_Xm_Y = 0$$

och

$$\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2\underbrace{\mathrm{C}(X,Y)}_{=0} = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y).$$

Två stokastiska variabler X och Y som uppfyller $\mathrm{C}(X,Y) = 0$ sägs vara *okorrelerade.*

Sats. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara en sekvens av stokastiska variabler och $a_1, \ldots, a_n$ konstanter. Då är

$$\mathsf{E}[a_1X_1 + \cdots + a_nX_n] = a_1\mathsf{E}[X_1] + \cdots + a_n\mathsf{E}[X_n].$$

Vidare om variablerna är okorrelerade (t.ex. om de är oberoende) så är

$$\mathrm{V}(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = a_1^2\mathrm{V}(X_1) + \cdots + a_n^2\mathrm{V}(X_n).$$

Som ett synnerligen viktigt specialfall har vi det aritmetiska medelvärdet.

Sats. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende likafördelade stokastiska variabler med $m = \mathsf{E}[X_i]$ och $\sigma = \mathrm{D}(X_i)$. Medelvärdet

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

har

$$\mathsf{E}\left[\overline{X}\right] = m \qquad \mathrm{V}\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \mathrm{D}\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Stora talens lag (STL)

Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende likafördelade stokastiska variabler med $m = \mathsf{E}[X_i]$ och $\sigma = \mathrm{D}(X_i)$.

För varje $\delta = k\mathrm{D}\left(\overline{X}\right) > 0$ fås med Tjebychevs olikhet att

$$\mathsf{P}\left(|\overline{X} - m| > \delta\right) \leq \frac{1}{k^2} = \frac{\mathrm{V}\left(\overline{X}\right)}{\delta^2} = \frac{\sigma^2}{\delta^2 n} \to 0$$

då $n \to \infty$.

Gauss approximationsformler

Vi vill beräkna väntevärdet och variansen av en funktion g av en stokastisk variabel X, dvs $\mathsf{E}[g(X)]$ och $\mathrm{V}(g(X))$. Med den aningslöse statistikerns sats förutsätter beräkningen att vi känner fördelningen för X. Här följer approximationer av $\mathsf{E}[g(X)]$ och $\mathrm{V}(g(X))$ utnyttjandes bara $\mathsf{E}[X]$, $\mathrm{V}(X)$ och funktionen $g(x)$.

Taylorutveckla $g(x)$ kring en punkt m:

$$g(x) \approx g(m) + (x-m)g'(m)$$

med likhet om $g(x) = ax + b$ för konstanter a och b. Låt $m = \mathsf{E}[X]$. Då får vi att

1. $\mathsf{E}[g(X)] \approx \mathsf{E}[g(m) + (X-m)g'(m)] = g(m) + (\mathsf{E}[X] - m)g'(m) = g(m)$.
2. $\mathrm{V}(g(X)) \approx \mathrm{V}(g(m) + (X-m)g'(m)) = (g'(m))^2\mathrm{V}(X-m) = (g'(m))^2\mathrm{V}(X)$.

Ett varningens ord: approximationerna fungerar bäst då fördelningen är någorlunda koncentrerad till ett intervall där $g(x)$ är approximativt linjär. För generaliseringar till fler dimensioner, $\mathrm{V}(g(X,Y))$, etc. se kurslitteraturen.