Stokastiska processer

En familj av stokastiska variabler $\{X(t); t \in T\}$ kallas för en stokastisk process. Indexmängden T kan ofta tolkas som olika tidpunkter. Om T är uppräknelig sägs processen vara tidsdiskret, om $T = [0, \infty)$ sägs den vara tidskontinuerlig. Tillståndsmängden för processen, E, kan även vara diskret eller kontinuerligt. Vi kommer enbart att betrakta diskreta tillståndsmängder och inledningsvis ändliga, dvs. $E = \{1, 2, \ldots, N\}$.

För en stokastisk process med uppräkneligt E är

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(X(t_0) = x_0, \cdots, X(t_n) = x_n\right) \\
&\quad = \mathsf{P}\left(X(t_0) = x_0\right) \cdot \\
&\qquad \mathsf{P}\left(X(t_1) = x_1 | X(t_0) = x_0\right) \cdots \\
&\qquad \mathsf{P}\left(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_0) = x_0\right)
\end{aligned}$$

för $t_0, \ldots t_n \in T$.

Definition: Den stokastiska processen sägs vara en *Markovprocess* om

$$\mathsf{P}\left(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_0) = x_0\right) = \mathsf{P}\left(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\right)$$

för alla $n \geq 1$, $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ och tillstånd $x_0, \ldots, x_n$.

Detta innebär att för en Markovprocess är

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(X(t_0) = x_0, \cdots, X(t_n) = x_n\right) \\
&\quad = \mathsf{P}\left(X(t_0) = x_0\right) \mathsf{P}\left(X(t_1) = x_1 | X(t_0) = x_0\right) \cdots \mathsf{P}\left(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\right)
\end{aligned}$$

för $t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in T$.

Markovprocessen kallas *tidshomogen* om $\mathsf{P}\left(X(t+s) = j | X(s) = i\right)$ inte beror på s, dvs

$$\mathsf{P}\left(X(t+s) = j | X(s) = i\right) = \mathsf{P}\left(X(t) = j | X(0) = i\right) = p_{ij}(t)$$

för alla $i, j \in E$.

Matrisform

Låt i fortsättningen $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, dvs vi betraktar en tidsdiskret Markovkedja.

Övergångssannolikheterna samlas i en övergångsmatris

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^{(n)} &= \left[\mathsf{P}\left(X_n = j | X_0 = i\right)\right]_{i,j} = \left[p_{ij}(n)\right]_{i,j} \\
\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{(1)} &= \left[\mathsf{P}\left(X_1 = j | X_0 = i\right)\right]_{i,j} = \left[p_{ij}\right]_{i,j}
\end{aligned}$$

där radsummorna i övergångsmatriserna är 1. Notera att E kan vara oändligt stor vilket ger "matriser" med oändligt många rader och kolumner.

Vi har att

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n+m)} &= \mathsf{P}\left(X_{n+m} = j | X_0 = i\right) = \sum_k \mathsf{P}\left(X_{m+n} = j, X_n = k | X_0 = i\right) \\
&= \sum_k \mathsf{P}\left(X_{m+n} = j | X_n = k, X_0 = i\right) \mathsf{P}\left(X_n = k | X_0 = i\right) \\
&= \sum_k \mathsf{P}\left(X_{m+n} = j | X_n = k\right) \mathsf{P}\left(X_n = k | X_0 = i\right) \\
&= \sum_k p_{kj}^{(m)} p_{ik}^{(n)}
\end{aligned}$$

dvs elementen i $n+m$-stegsövergångsmatrisen fås som elementen i $\boldsymbol{P}^{(n)} \cdot \boldsymbol{P}^{(m)}$. Dvs,

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^{(1+(n-1))} = \boldsymbol{P}^{(1)} \cdot \boldsymbol{P}^{(n-1)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{(n-1)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{(n-2)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} \cdots \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^n.$$

$\boldsymbol{P}^{(0)}$ identifieras som $\boldsymbol{I}$, enhetsmatrisen.

Komponenterna i radvektorn $\boldsymbol{p}^{(n)}$ av absoluta sannolikheter

$$\boldsymbol{p}^{(n)} = \left[\mathsf{P}\left(X_n = j\right)\right]_j,$$

där $\boldsymbol{p}^{(0)}$ är begynnelse- (initial-) -fördelningen, är

$$\boldsymbol{p}_j^{(n)} = \mathsf{P}\left(X_n = j\right) = \sum_i \mathsf{P}\left(X_n = j | X_0 = i\right) \mathsf{P}\left(X_0 = i\right) = \sum_i p_{ij}^{(n)} \boldsymbol{p}_i^{(0)}$$

dvs komponenterna i vektorn $\boldsymbol{p}^{(0)} \boldsymbol{P}^{(n)}$.

Sammanfattning:

Chapman-Kolmogorov

1. $\boldsymbol{P}^{(n+m)} = \boldsymbol{P}^{(n)} \cdot \boldsymbol{P}^{(m)}$.
2. $\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^n$.
3. $\boldsymbol{p}^{(n)} = \boldsymbol{p}^{(0)} \boldsymbol{P}^{(n)}$.

Om man startar en Markovkedja med fördelning $\boldsymbol{p}^{(0)}$ så är

$$\boldsymbol{p}^{(n)} = \boldsymbol{p}^{(0)} \boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{p}^{(0)} \boldsymbol{P}^n.$$

för $n \geq 0$. Om $n \to \infty$ vad händer med $\boldsymbol{p}^{(n)}$? Kan $\boldsymbol{p}^{(n)}$ konvergera mot en fördelning? Vad är $\boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}^{\infty}$?

Absorption

Inledande exempel: A och B spelar ett tärningsspel. Om den som kastar får

resultat	**händelse**
1,2	kastaren vinner
3	omkast
4,5	motståndaren får kasta
6	kastaren förlorar

Spelets utveckling kan beskrivas av en markovkedja med tillstånd $E = \{1, 2, 3, 4\}$ med tolningarna "A kastar", "B kastar", "A vinner" resp "B vinner". Övergångsmatrisen blir då

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \\ 2/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tillstånden $A = \{3, 4\}$ är absorptionstillstånd de övriga $G = \{1, 2\}$ är genomgångstillstånd. Notera även att med vår numrering av tillstånden kan man skriva

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{GG} & \boldsymbol{P}_{GA} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

där $\boldsymbol{I}$ är enhetsmatrisen och $\mathbf{0}$ en matris med 0:or.

Vi skall fånga storheter som

$$a_{ij} = \mathsf{P}\,(\text{Kedjan absorberas i } j \text{ givet start i } i) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)},$$

för $i \in G$ och $j \in A$. (Notera att $a_{ij} = 0$ för $j \in G$ och $a_{ij} = 0$ för $i \in A$ då $j \neq i$.)

Sannolikheterna a_{ij} uppfyller

$$\begin{aligned} a_{1,3} &= p_{1,3} + p_{1,1}a_{1,3} + p_{1,2}a_{2,3} = \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{6}a_{1,3} + \tfrac{2}{6}a_{2,3} \\ a_{2,3} &= p_{2,3} + p_{2,1}a_{1,3} + p_{2,2}a_{2,3} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{6}a_{1,3} + \tfrac{1}{6}a_{2,3} \end{aligned}$$

vilket har lösningen

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{1,3} & a_{2,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/7 & 3/7 \\ 3/7 & 4/7 \end{bmatrix}$$

där vi utnyttjade att $a_{i,4} = 1 - a_{i,3}$.

I allmänhet för $i \in G$ och $j \in A$ så är

$$a_{ij} = p_{ij} + \sum_{k\in G} p_{ik}a_{kj}$$

eller på matrisform: med $|A|$ absorptionstillstånd och $|G|$ genomgångstillstånd så är A en $|G| \times |A|$-matris sådan att

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_{GA} + \boldsymbol{P}_{GG}\boldsymbol{A}$$

vilket ger $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{GG})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_{GA}$ eller

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{GG})^{-1}\boldsymbol{P}_{GA}.$$

Hur lång tid pågår spelet?

Låt T_i = tiden till absorption givet start i i, $i \in G$, och betrakta $t_i = \mathsf{E}\,[T_i]$. ($T_i = 0$ för $i \in A$.)

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 + p_{1,1}t_1 + p_{1,2}t_2 = 1 + \tfrac{1}{6}t_1 + \tfrac{2}{6}t_2 \\ t_2 &= 1 + p_{2,1}t_1 + p_{2,2}t_2 = 1 + \tfrac{2}{6}t_1 + \tfrac{1}{6}t_2 \end{aligned}$$

vilket har lösningen

$$\boldsymbol{t} = [t_i] = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

I allmänhet för $i \in G$ så är

$$t_i = 1 + \sum_{k\in G} p_{ik}t_k$$

för alla $i \in G$. Med $\boldsymbol{t}$ som kolumnvektor fås matrisformuleringen

$$\boldsymbol{t} = \mathbf{1} + \boldsymbol{P}_{GG}\boldsymbol{t}$$

eller

$$\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{GG})^{-1}\mathbf{1}$$

där $\mathbf{1}$ är kolumnvektorn med ettor.