Konstruktion av sannolikhetsmått för uppräkneliga utfallsrum (2.4):

Om
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$$
så kan vi till varje utfall ω_i i Ω tillskriva ett tal p_i som uppfyller

1. $0 \leq p_i \leq 1$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

och låta $\mathsf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$. Då är
$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{\omega_i \in A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{\omega_i \in A} \mathsf{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega_i \in A} p_i.$$
Detta $\mathsf{P}(\cdot)$ uppfyller axiomsystemet.

Speciellt: *likformig fördelning* definierar vad vi menar med ”på måfå”.
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\} \qquad \mathsf{P}(\{\omega_i\}) = p_i = \frac{1}{n}.$$
för alla $i = 1, \ldots, n$. För en händelse A är då
$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{\#\text{ element i } A}{\#\text{ element i } \Omega}.$$

Grundlägande kombinatorik

Sats (Multiplikationsprincipen). Antalet sätt att utföra k operationer, där operation i kan utföras på n_i sätt, är
$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k.$$

Antalet sätt vi kan välja ut k element bland n distinkta. (Sats 2.5–2.7)

	Med Återläggning	Utan Återläggning
Med Ordningshänsyn	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Utan Ordningshänsyn	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Fallet med med hänsyn till ordning fås med återläggning enligt multiplikationsprincipen $n \cdot n \cdots n = n^k$ sätt och för utan återläggning
$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$
Fallet utan återläggning och utan hänsyn till ordning: Beteckna talet med ${}_nC_k$. Ordna mängden för att få med hänsyn till ordning:
$$\frac{n!}{(n-k)!} = k!\,{}_nC_k \quad \Rightarrow \quad {}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$
Talet
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

(utläses "n över k") kallas *binomialkoefficient* och förekommer flitigt i kursen. Tolkningen av det är antalet sätt som man kan välja ut k element bland n distinkta, utan återläggning och utan hänsyn till ordning (tag dem i klump). Det sista fallet MÅ/UO visas inte.

Exempel: Antal Lottorader $\binom{35}{7} = 6\,724\,520$.

Exempel: Antal pokerhänder $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

Exempel: Antalet olika pizzabeställningar en grupp om 5 personer kan göra (menyn har 40 olika pizzor) är $\binom{40-1+5}{5} = 1\,086\,008$.

Betingad sannolikheter/oberoende händelser

Hur påverkar information om en händelse sannolikheten för en annan händelse?

Introduktion: SPAM-filtrering. $n = 348$ mejl undersöks. Låt $A = \{\text{"SPAM"}\}$, $B = \{\text{"innehåller texten FREE"}\}$.

Data sammanfattas i tabellen

	SPAM	ej SPAM	
FREE	17	1	18
ej FREE	172	158	330
	189	159	348

Det finns ett samband mellan om ett mejl är SPAM och det innehåller texten FREE eller ej. För ett på måfå valt mejl har vi $\mathsf{P}(A) = 189/348 = 0.543$. Givet information om att ett mejl innehåller texten FREE har vi istället $\mathsf{P}(A|B) = 17/18 = 0.9444 \neq \mathsf{P}(A)$.

Definition: Låt A, B vara två händelser med $\mathsf{P}(B) > 0$. Då definierar vi att sannolikheten för A betingat B ("A givet B"), $\mathsf{P}(A|B)$, som

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$$

Om händelsen B inte påverkar sannolikheten för att A inträffar så har vi $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$ och $\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)$. Uttryckt med hjälp av definitionen av betingade sannolikheter

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$$

vilket leder det oss till definitionen:

Definition: A och B är oberoende om $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)$.

OBS! Oförenliga (disjunkta) händelser är **ej** oberoende!

Sats (Lagen om total sannolikhet, (2.9)). Låt $B_1, B_2, \ldots, B_n$ vara en partition av Ω, dvs $B_i \cap B_j = \varnothing$ då $i \neq j$, och $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$, där $\mathsf{P}(B_i) > 0$ för alla i. En händelse A med $\mathsf{P}(A) > 0$ kan delas in i disjunkta delar, $A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)$, och

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A|B_i)\,\mathsf{P}(B_i)\,.$$

Notera att sannolikheten för en snitthändelse kan beräknas på två sätt:

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \begin{cases} \mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B) \\ \mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A) \end{cases} \qquad \text{(jfr. oberoende händelser)}$$

Alltså kan vi räkna ut

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A)}.$$

Utnyttjar vi sedan lagen om total sannolikhet för att beräkna $\mathsf{P}(A)$ får vi

Sats (Bayes sats (2.10)). Under samma antaganden som i 2.9

$$\mathsf{P}(B_i|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B_i)\,\mathsf{P}(B_i)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A|B_i)\,\mathsf{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A|B_i)\,\mathsf{P}(B_i)}.$$

Exempel (Sjukdomsdiagnostik): I detta konstruerade exempel låt $A = \{\text{"Diagnos sjuk"}\}$ och $B = \{\text{"Patient sjuk"}\}$.

$$\mathsf{P}(B) = 0.01 \quad \mathsf{P}(A|B) = 0.80 \quad \mathsf{P}(A^*|B^*) = 0.95.$$

$$\mathsf{P}(A \cap B) = 0.008 \qquad \mathsf{P}(A^* \cap B) = 0.002 \qquad \mathsf{P}(A \cap B^*) = 0.0495 \qquad \mathsf{P}(A^* \cap B^*) = 0.9405$$

Då är

$$\mathsf{P}(\{\text{"fel diagnos"}\}) = \mathsf{P}(A \cap B^*) + \mathsf{P}(A^* \cap B) = 0.0515,$$

dvs sämre än om man friskförklarade alla patienter. Vidare

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A|B^*)\,\mathsf{P}(B^*)} = \frac{0.008}{0.008 + 0.0495} = 0.139.$$

$$\mathsf{P}(B|A^*) = \frac{0.002}{0.002 + 0.9405} = 0.002122,$$

och det är den sista sannolikheten som vi verkligen vill vara säkra på är liten.