# Väntevärde och varians

**Sats (Den aningslöse statistikerns sats).** För en reellvärd funktion $g(x)$ och en stokastisk variabel $X$ är

$$\mathsf{E}\left[g(X)\right] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k\in\Omega_X} g(k)\cdot \mathsf{P}\left(X=k\right) & \text{om } X \text{ är diskret} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f_X(x)\,dx & \text{om } X \text{ är kontinuerlig} \end{cases}$$

förutsatt att summan/integralen är absolutkonvergent.

**Definition:** *Variansen* för en stokastisk variabel definieras och betecknas

$$\mathrm{V}\left(X\right) = \mathsf{E}\left[(X-\mathsf{E}\left[X\right])^2\right].$$

**Exempel:** Tärningskast

$$\mathrm{V}\left(X\right) = \mathsf{E}\left[(X-3.5)^2\right] = \sum_{k=1}^{6}(k-3.5)^2\frac{1}{6} = \frac{35}{12} \approx 2.917$$

(enhet: ”kvadratprickar”)

**Definition:** *Standardavvikelsen* för en stokastisk variabel definieras och betecknas

$$\mathrm{D}\left(X\right) = \sqrt{\mathrm{V}\left(X\right)}.$$

Denna har rätt enhet.

En liten insyn i vad standardavvikelsen betyder kan fås genom följande.

**Sats (Tjebychevs olikhet).** För $k>0$ är

$$\mathsf{P}\left(|X-\mathsf{E}\left[X\right]| > k\mathrm{D}\left(X\right)\right) \le \frac{1}{k^2}.$$

*Bevis: (Kontinuerliga fallet)* Med $\mu = \mathsf{E}\left[X\right]$ och $\sigma = \mathrm{D}\left(X\right)$ är för $\epsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(|X-\mathsf{E}\left[X\right]| > \epsilon\right) = \int_{x:\,\frac{(x-\mu)^2}{\epsilon^2}>1} f_X(x)\,dx \le \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\mu)^2}{\epsilon^2}f_X(x)\,dx = \frac{\mathrm{V}\left(X\right)}{\epsilon^2}.$$

Med $\epsilon = k\mathrm{D}\left(X\right) > 0$ fås påståendet.

# Räknelagar för väntevärden och varianser

**Sats.** För konstanter $a, b$ är

$$\mathsf{E}\left[aX+b\right] = a\mathsf{E}\left[X\right]+b \qquad \mathrm{V}\left(aX+b\right) = a^2\mathrm{V}\left(X\right)$$

*Bevis: (diskreta fallet)*

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[aX+b\right] &= \sum_{k\in\Omega_X}(ak+b)\mathsf{P}\left(X=k\right) \\ &= a\sum_{k\in\Omega_X}k\mathsf{P}\left(X=k\right) + b\sum_{k\in\Omega_X}\mathsf{P}\left(X=k\right) = a\mathsf{E}\left[X\right]+b \\ \mathrm{V}\left(aX+b\right) &= \mathsf{E}\left[((aX+b)-\mathsf{E}\left[aX+b\right])^2\right] = \mathsf{E}\left[(aX+b-a\mathsf{E}\left[X\right]-b)^2\right] \\ &= \mathsf{E}\left[a^2(X-\mathsf{E}\left[X\right])^2\right] = a^2\mathsf{E}\left[(X-\mathsf{E}\left[X\right])^2\right] = a^2\mathrm{V}\left(X\right) \end{aligned}$$

**Sats.** För två stokastiska variabler $X$ och $Y$ är

$$\mathsf{E}[X+Y] = \mathsf{E}[X] + \mathsf{E}[Y].$$

*Bevis: (diskreta fallet)*

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[X+Y] &= \sum_{x\in\Omega_X}\sum_{y\in\Omega_Y}(x+y)\mathsf{P}(X=x, Y=y) \\
&= \sum_{x\in\Omega_X} x \sum_{y\in\Omega_Y} \mathsf{P}(X=x, Y=y) + \sum_{y\in\Omega_Y} y \sum_{x\in\Omega_X} \mathsf{P}(X=x, Y=y) \\
&= \sum_{x\in\Omega_X} x\mathsf{P}(X=x) + \sum_{y\in\Omega_Y} y\mathsf{P}(Y=y) = \mathsf{E}[X] + \mathsf{E}[Y].
\end{aligned}$$

**Sats.** För två oberoende stokastiska variabler $X$ och $Y$ gäller

$$\mathsf{E}[XY] = \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y].$$

*Bevis: (kontinuerliga fallet)*

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\,dx}_{\mathsf{E}[X]}\,dy = \mathsf{E}[X] \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\,dy}_{\mathsf{E}[Y]} = \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y].
\end{aligned}$$

**Exempel:** Låt $U_1, U_2, U_3$ vara oberoende och likaformigt fördelade på intervallet $[0,\ 1]$. Då är $f_U(x) = 1$ för $0 \le x \le 1$ och $\mathsf{E}[U] = 1/2$.

Av $U_1$ och $U_2$ konstrueras en rektangel med $U_1$ och $U_2$ som sidlängder. Rektangeln har då en genomsnittlig area

$$\mathsf{E}[U_1 \cdot U_2] = \{\text{oberoende}\} = \mathsf{E}[U_1]\,\mathsf{E}[U_2] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Vidare konstrueras en kvadrat med sidlängd $U_3$. Kvadraten har en genomsnittlig area

$$\mathsf{E}\left[U_3^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_U(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot 1\,dx = \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

så kvadraten har i genomsnitt större area än rektangeln. Mer om detta snart.

Låt $(X,Y)$ vara en tvådimensionell stokastisk variabel och beteckna $\mu_x = \mathsf{E}[X]$ och $\mu_y = \mathsf{E}[Y]$. Då är

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(X+Y) &= \mathsf{E}\left[(X+Y-\mathsf{E}[X+Y])^2\right] = \mathsf{E}\left[(X-\mu_x+Y-\mu_y)^2\right] \\
&= \mathsf{E}\left[(X-\mu_x)^2 + (Y-\mu_y)^2 + 2(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right] \\
&= \mathsf{E}\left[(X-\mu_x)^2\right] + \mathsf{E}\left[(Y-\mu_y)^2\right] + 2\mathsf{E}[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] \\
&= \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2\mathrm{C}(X,Y).
\end{aligned}$$

**Definition:** Kovariansen mellan två stokastiska variabler $X$ och $Y$ definieras

$$\mathrm{C}(X,Y) = \mathsf{E}[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)].$$

Notera att $\mathrm{V}(X) = \mathrm{C}(X, X)$.

Variabeln

$$(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$$

mäter om $X$ och $Y$ tenderar att variera åt samma eller motsatt håll. Om $X$ är stor/liten (relativt $\mu_x$) och $Y$ samtidigt är stor/liten (relativt $\mu_y$) så är kovariansen positiv eftersom $+ \cdot + = +$ och $- \cdot - = +$. Analogt, om $X$ och $Y$ varierar åt motsatt håll är kovariansen negativ, $+ \cdot - = -$ och $- \cdot + = -$. Kovariansen mäter *linjär* samvariation.

Korrelationen (korrelationskoefficienten) är det dimensionslösa linjära samvariationsmåttet. Den definieras och betecknas

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{C}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)\,\mathrm{V}(Y)}} = \frac{\mathrm{C}(X,Y)}{\mathrm{D}(X)\,\mathrm{D}(Y)}.$$

Korrealtionskoefficienten uppfyller alltid

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

och $|\rho_{X,Y}| = 1$ om $Y = aX + b$.

Med linjäriteten hos väntevärden har vi även följande beräkningsformel

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}(X,Y) &= \mathsf{E}[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = \mathsf{E}[XY - \mu_x Y - \mu_y X + \mu_x \mu_y] \\
&= \mathsf{E}[XY] - \mu_x \mathsf{E}[Y] - \mu_y \mathsf{E}[X] + \mu_x \mu_y = \mathsf{E}[XY] - \mu_x \mu_y.
\end{aligned}$$

Speciellt: Följande relation brukar kallas för Steiners sats.

$$\mathrm{V}(X) = \mathsf{E}\left[X^2\right] - (\mathsf{E}[X])^2$$

För oberoende stokastiska variabler är $\mathsf{E}[XY] = \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y]$ så

$$\mathrm{C}(X,Y) = \mathsf{E}[XY] - \mu_x \mu_y = \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y] - \mu_x \mu_y = 0$$

och

$$\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2\underbrace{\mathrm{C}(X,Y)}_{=0} = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y).$$

Stokastiska variabler (inte nödvändigtvis oberoende) som har $\mathrm{C}(X,Y) = 0$ (alt. $\rho_{X,Y} = 0$) sägs vara *okorrelerade*.