Test av utsagor om parametervärden för θ. Test av

$$H_0 : \theta \in \Theta_0,$$

mot

$$H_1 : \theta \notin \Theta_0,$$

på signifikansnivå α, det vill säga $\alpha \geq \mathsf{P}\,(\text{förkasta sann } H_0) = \mathsf{P}\,(T \in C \text{ om } H_0 \text{ sann})$, där T är den stokastiska variabel som beskriver teststorheten t.

Funktionen

$$\beta(\theta) = \mathsf{P}\,(T \in C) = \mathsf{P}\,(\text{Förkasta } H_0)$$

kallas testets styrkefunktion.

Exempel: Opinionsundersökning: test ifall andelen sympatisörer har förändrats Vill testa

$$H_0 : p_1 = p_2 \text{ mot } H_1 : p_1 \neq p_2$$

på signifikansnivå approximativt $\alpha = 0.05$. Hypoteserna formuleras

$$H_0 : p_2 - p_1 = 0 \text{ mot } H_1 : p_2 - p_1 \neq 0.$$

Skatta $p_2 - p_1$ med $\hat{p}_{\text{obs}} - p^*_{\text{obs}}$. Vi förkastar H_0 till förmån för H_1 för stora värden på $|t|$ där

$$t = \frac{\hat{p}_{\text{obs}} - p^*_{\text{obs}}}{\sqrt{\frac{\hat{p}_{\text{obs}}(1-\hat{p}_{\text{obs}})}{m} + \frac{p^*_{\text{obs}}(1-p^*_{\text{obs}})}{n}}}$$

som om H_0 är sann är ett utfall av en (approximativt) $\mathrm{N}(0,1)$-fördelad stokastisk variabel T.

Ur $\mathrm{N}(0,1)$-tabeller fås att $\mathsf{P}\left(|T| > \lambda_{\alpha/2}\right) = \alpha$. Med $\alpha = 0.05$ fås $\lambda_{0.025} = 1.96$. Alltså: förkasta H_0 om $|t| > 1.96$.

Vi observerar utfallet

$$t = \frac{0.355 - 0.350}{\sqrt{\frac{0.355(1-0.355)}{1886} + \frac{0.350(1-0.350)}{1907}}} = 0.286 < 1.96$$

och vi förkastar ej H_0 på nivå 5%.

Den lägsta signifikansnivå som man kan förkasta observationen t på kallas för testets p-värde. Här

$$\text{p-värdet} = \mathsf{P}\,(|T| > 0.286) = 2(1 - \Phi(0.286)) = 0.775.$$

χ^2-test

χ^2-testet kan användas för att testa hypoteser rörande flera andelar (test av fördelning), test av likafördelning (homogenitetstest) och test av oberoende (kontigenstest). Här är hypoteserna inte bara utsagor om en parameter utan om en hel fördelning: t.ex. testa

$$H_0 : X \text{ är } \mathrm{Po}(\mu), \text{ något } \mu$$

mot

$$H_1 : X \text{ är inte Poissonfördelad något } \mu.$$

χ^2-testet utgår ifrån multinomialfördelningen.

Antag att en observation har sannolikhet p_i att hamna i kategori i, $i = 1, \ldots, r$. $\sum_{i=1}^r p_i = 1$. Av n oberoende försök Låt X_i beskriva antalet observationer i kategori i. Modell:

$$X_i \sim \mathrm{Bin}(n, p_i), \quad i = 1, \ldots, r.$$

Det förväntade antalet observationer i kategori i är

$$\mathsf{E}\left[X_i\right] = np_i.$$

Notera att $X_1, \ldots, X_r$ inte är oberoende. $\sum_{i=1}^{r} X_i = n$. Vektorn $(X_1, \ldots, X_r)$ är multinomialfördelad

$$\mathsf{P}\left(X_1 = x_1, \ldots, X_r = x_r\right) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_r!} p_1^{x_1} \cdots p_r^{x_r}.$$

Med $r = 2$ fås binomialfördelningen.

Sats.

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i} \overset{\text{approx}}{\sim} \chi^2(r-1)$$

Alla test framgent bygger på detta resultat. Approximationen fungerar bäst då $np_i \geq 5$, dvs. det förväntade antalet observationer i varje kategori får inte vara för litet.

Exempel (Test på andelar/fördelning): Antalet bilar på en parkeringsplats: Under 50 dagar observerades följande kategoridata

	kategori (antal bilar)				
	1 (0–2)	**2** (3)	**3** (4)	**4** (5–)	
Observerat antal: x_i	22	15	6	7	50

Låt X beskriva antalet bilar på parkeringsplatsen. Vi vill testa

$$H_0 : X \text{ är Po}(4) \quad \text{mot} \quad H_1 : X \text{ är inte Po}(4)$$

på nivå $\alpha = 0.05$. Om H_0 är sann så är

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathsf{P}\left(X \leq 2\right) = 0.2381 \\ p_2 &= \mathsf{P}\left(X = 3\right) = 0.1954 \\ p_3 &= \mathsf{P}\left(X = 4\right) = 0.1954 \\ p_4 &= \mathsf{P}\left(X \geq 5\right) = 0.3712 \end{aligned}$$

Detta ger

	kategori (antal bilar)				
	1 (0–2)	**2** (3)	**3** (4)	**4** (5–)	
Observerat antal: x_i	22	15	6	7	50
Förväntat antal: np_i	11.9	9.8	9.8	18.6	50

Vi förkastar hypotesen för stora värden på

$$q = \sum_i \frac{(x_i - np_i)^2}{np_i} = 20.014$$

som om H_0 är sann är ett utfall på en $\chi^2(3)$-fördelad stokastisk variabel. Ur tabell fås $\chi^2_\alpha = 7.8147$. Då $q > \chi^2_\alpha$ förkastas H_0 på nivå $\alpha = 5\%$. Det är orimligt att antalet bilar X är Poisson(4)-fördelad.

För att testa hypoteser som $H_0 : X$ är Po(μ), något μ. Skatta μ med $\mu^*_{\text{obs}} = 2.82$. Skattningen ger

	kategori (antal bilar)				
	1 (0–2)	**2** (3)	**3** (4)	**4** (5–)	
Observerat antal: x_i	22	15	6	7	50
Hypotes: $p_i(\mu^*_{\text{obs}})$	0.465	0.223	0.157	0.155	1.0
Förväntat antal: $np_i(\mu^*_{\text{obs}})$	23.2	11.1	7.9	7.8	50

Vi förkastar hypotesen för stora värden på

$$q = \sum_i \frac{(x_i - np_i(\mu^*_{\text{obs}}))^2}{np_i(\mu^*_{\text{obs}})} = 1.92$$

som om H_0 är sann är ett utfall på en $\chi^2(4-1-1)$-fördelad stokastisk variabel. Ur tabell fås $\chi^2_\alpha = 5.99$. Då $q < \chi^2_\alpha$ förkastas inte H_0 på nivå $\alpha = 5\%$. Det är inte orimligt att antalet bilar X är Poisson-fördelad.

Generellt,

$$(\text{Antalet frihetsgrader}) = (\text{Antalet kategorier} - 1) - (\text{Antalet skattade parameterar}).$$