Tidsdiskreta Markovkedjor med oändligt antal tillstånd

Viktig konsekvens: existensen av en stationärfördelning inte given.

Låt T_i vara tiden att gå från i tillbaka till i. Tre fall:

$$\begin{array}{cl} \mathsf{P}(T_i < \infty) < 1 & i \text{ transient} \\ \mathsf{P}(T_i < \infty) = 1, \mathsf{E}[T_i] = \infty & i \text{ noll-rekurrent} \\ \mathsf{E}[T_i] < \infty & i \text{ positivt rekurrent} \end{array}$$

Satserna innan generaliseras om ”ändlig” irreducibel Markovkedja ersätts med ”positivt rekurrent” irreducibel Markovkedja.

Markovkedjor i kontinuerlig tid

Definition: Den tidskontinuerliga stokastiska processen $(X(t))_{t\geq 0}$ sägs vara en *Markovprocess* om

$$\mathsf{P}(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \cdots, X(t_0) = x_0) = \mathsf{P}(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1})$$

för alla $n \geq 1$, tidpunkter $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ och tillstånd $x_0, \ldots, x_n$.

Formellt kan man forfarande bilda matriser av övergångssannolikheter

$$\boldsymbol{P}(t) = [X(t) = j | X(0) = i]_{i,j}$$

som uppfyller Chapman-Kolmogorovs ekvationer:

1. $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$.
2. $\boldsymbol{P}(s+t) = \boldsymbol{P}(s) \cdot \boldsymbol{P}(t)$.
3. $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}(t)$.

Vi definierar *intensiteterna*

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \mathsf{P}(X(h) = j | X(0) = i), \quad j \neq i \\ q_i &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \mathsf{P}(X(h) \neq i | X(0) = i) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [1 - \mathsf{P}(X(h) = i | X(0) = i)] \end{aligned}$$

Vi förutsätter att derivatorna existerar och är ändliga. Vidare förutsätter vi att

$$q_i = \sum_{j\neq i} q_{ij}$$

Alltså är

$$\mathsf{P}(X(t+h) = j | X(t) = i) \approx q_{ij} h \qquad \mathsf{P}(X(t+h) = i | X(t) = i) \approx 1 - q_i h.$$

Låt T vara uppehållstiden i tillstånd i. Minneslösheten hos en Markovprocess innebär att

$$\mathsf{P}(T > s + t | T > s) = \mathsf{P}(T > t | T > 0)$$

för alla $s, t \geq 0$. Alltså är

$$\frac{\mathsf{P}(T > s + t)}{\mathsf{P}(T > s)} = \frac{\mathsf{P}(T > t)}{\mathsf{P}(T > 0)}$$

eller

$$\ln(\mathsf{P}(T > s + t)) - \ln(\mathsf{P}(T > s)) = \ln(\mathsf{P}(T > t)) - \ln(\mathsf{P}(T > 0))$$

eller med $R(t) = \ln(\mathsf{P}(T > t))$ så är $R(s + t) - R(s) = R(t) - R(0)$ för alla $t, s \geq 0$. Detta medför att $R(t) = a + bt$ eller $\mathsf{P}(T > t) = \mathrm{e}^{a+bt}$. Randvillkor ger att $a = 0, b = -q_i$ så $\mathsf{P}(T > t) = \mathrm{e}^{-q_i t}$ uppehållstiden i tillstånd i är exponentialfördelad med intensitet q_i.

Dynamik: Markovkedjan tillbringar en exponentialfördelad tid i tillstånd i med väntevärde $1/q_i$. Därefter hoppar kedjan till tillstånd $j \neq i$ med sannolikhet $\tilde{p}_{ij} = q_{ij}/q_i$.

Definition: Initensitetsmatrisen för en tidskontinuerlig Markovkedja definieras som $\boldsymbol{Q} = [q_{ij}]_{ij}$ där $q_{ii} = -q_i$.

Exempel: Intensitetsmatrisen

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

motsvaras av att tiderna i tillstånden är exponentialfördelade med väntevärden 1/5, 1 resp. 1/4 och har hoppmatris

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notera att

$$\boldsymbol{Q} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\boldsymbol{P}(h) - \boldsymbol{I})$$

där alla radsummor i matrisen $\boldsymbol{Q}$ är 0.

Matrisen $\boldsymbol{P}(t) = [p_{ij}(t)]_{ij}$ bestäms som lösning till följande differentialekvationer:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{P}(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[\boldsymbol{P}(t+h) - \boldsymbol{P}(t)] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(h) - \boldsymbol{P}(t)] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[\boldsymbol{P}(h)\boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{P}(t)] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\boldsymbol{P}(t)[\boldsymbol{P}(h) - \boldsymbol{I}] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[\boldsymbol{P}(h) - \boldsymbol{I}]\boldsymbol{P}(t) \\ &= \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t). \end{aligned}$$

Detta kallas för Kolmogorovs framåt- respektive bakåtekvationer.

Anmärkning: bakåtekvationerna har alltid (minst en) lösning, framåtekvationerna kan sakna lösning.

Med hjälp av framåtekvationerna får vi att de absoluta sannolikheterna uppfyller:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{Q}.$$

Sats. En sannoliketsfördelning $\boldsymbol{\pi}$ uppfyller

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q}$$

om och endast om den är en stationärfördelning för Markovkedjan med intensitetsmatris $\boldsymbol{Q}$.

Bevis: Om $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}(t)$ så är med framåtekvationen $\mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q}$.

Omvänt: Om $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q} = \mathbf{0}$ så med $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{\pi}$ är $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}(t)$ och $\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t) = \mathbf{0}$ det vill säga $\boldsymbol{p}(t)$ är konstant.

Flödesbalans under stationaritet! För alla tillstånd i gäller att

$$\pi_j q_j = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij}$$

Exempel: Intensitetsmatrisen

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

ger balansekvationerna

$$5\pi_1 = 0\pi_2 + 2\pi_3 \qquad 1\pi_2 = 4\pi_1 + 2\pi_3 \qquad 4\pi_3 = 1\pi_1 + 1\pi_2$$

som entydigt bestämmer $\boldsymbol{\pi}$ upp till en multiplikativ konstant. Kravet att $\boldsymbol{\pi}$ är en sannolikhetsfördelning ger lösningen

$$\boldsymbol{\pi} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{2}{25} & \frac{18}{25} & \frac{5}{25} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} .08 & .72 & .20 \end{array} \right].$$

Sats. Om Markovkedjan är ändlig existerar minst en stationärfördelning.

Sats. Om Markovkedjan är irreducibel existerar högst en stationärfördelning.

Sats. Om Markovkedjan är ändlig och irreducibel är den tidskontinuerliga Markovkedjan ergodisk.