

Tag en Markovkedja i kontinuerlig tid med intensitetsmatris Q . En fördelning π som uppfyller $\pi Q = 0$ är en stationärfördelning för Markovkedjan.

Exempel: Lösning av $\pi Q = 0$ där

$$Q = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

ger $\pi = (\frac{2}{25} \frac{18}{25} \frac{5}{25}) = (.08 \ .72 \ .20)$. Ekvationen $\pi Q = 0$ kallas den (globala) balansekvationen.

Precis som i diskret tid kan π_i tolkas som andelen tid kedjan tillbringar i tillstånd i .

$$\pi_i = \frac{1/q_i}{E[T_i]}$$

där T_i är tiden mellan två inträden till tillstånd i . Alltså är

$$E[T_i] = \frac{1}{q_i \pi_i}.$$

Vidare är andelen tid som kedjan tillbringar i tillstånd j mellan två inträden i tillstånd i :

$$E[T_i] \pi_j = \frac{\pi_j}{q_i \pi_i}.$$

Absorbtion i kontinuerlig tid: Det ändliga tillståndsrummet $E = A \cup G$ där $A \cap G = \emptyset$, där A är mängden av absorberande tillstånd, $q_i = 0$, och G genomgångstillstånden.

Sannolikheterna $a_{ij} = P(\text{Kedjan absorberas i } j \text{ givet start i } i)$ uppfyller

$$a_{ij} = \sum_k \tilde{p}_{ik} a_{kj} = \tilde{p}_{ij} + \sum_{k \in G} \tilde{p}_{ik} a_{kj} = \frac{q_{ij}}{q_i} + \sum_{k \in G \setminus \{i\}} \frac{q_{ik}}{q_i} a_{kj}.$$

för alla $i \in G, j \in A$. För de förväntade tiderna till absorbtion fås

$$t_i = \frac{1}{q_i} + \sum_k \tilde{p}_{ik} t_k = \frac{1}{q_i} + \sum_{k \in G} \tilde{p}_{ik} t_k = \frac{1}{q_i} + \sum_{k \in G \setminus \{i\}} \frac{q_{ik}}{q_i} t_k$$

för $i \in G$.

Födelse-/döds-processer och köteori

Låt tillståndsrummet för den tidskontinuerliga Markovkedjan $(X(t))_{t \geq 0}$ vara $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ och dess intensitetsmatris Q . Processen $(X(t))_{t \geq 0}$ sägs vara en födelseprocess om de enda positiva intensiteterna är på formen $q_{i,i+1}$, $i \geq 0$, och en födelse-/dödsprocess om endast $q_{i,i+1} = \lambda_i$ och $q_{i+1,i} = \mu_{i+1}$, $i \geq 0$, är positiva.

Exempel: Poissonprocessen, en födelseprocess med konstant födelseintensitet, $\lambda_i = q_{i,i+1} = \lambda > 0$.

Med start i $X(0) = 0$ erhålls framåtekvationen

$$\frac{d}{dt} p(t) = p(t) Q,$$

eller

$$p'_j(t) = \lambda p_{j-1}(t) - \lambda p_j(t), \quad j \geq 1.$$

Låt $g(s, t) = \mathbb{E}[s^{X(t)}]$. Då är

$$\frac{\partial}{\partial t} g(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_j p_j(t) s^j = \lambda \sum_j p_{j-1}(t) s^j - \lambda \sum_j p_j(t) s^j = \lambda s g(s, t) - \lambda g(s, t)$$

vilket ger $\frac{\partial}{\partial t} g(s, t) = \lambda(s-1)g(s, t)$ det vill säga $g(s, t) = e^{\lambda(s-1)t} = e^{(s-1)\mu}$ där $\mu = \lambda t$. Alltså, $X(t)$ är Poissonfördelad med väntevärde λt .

Poissonprocessen har karaktäriseras av att den har oberoende Poissonfördelade tillskott, det vill säga för alla $0 < s < t$ är $X(t) - X(s)$ och $X(s) - X(0)$ oberoende och Poissonfördelade med väntevärde $\lambda(t-s)$ resp. λs .

Regularitet

För en generell födelseprocess med $X(0) = 0$ låt T_i , $i > 0$, vara tiden till tillstånd i besöks. Då är

$$\mathbb{E}[T_n] = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}.$$

Två saker kan inträffa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[T_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \begin{cases} < \infty & \text{processen exploderar, är irreguljär} \\ = \infty & \text{processen exploderar inte, är reguljär} \end{cases}$$

Vi kommer bara att betrakta reguljära Markovkedjor. För nödvändiga och tillräckliga villkor för regularitet se kursboken.

Exempel: Födelseprocessen med $\lambda_i = i\lambda$, $i \geq 1$, är reguljär eftersom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[T_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i\lambda} = \infty.$$

Exempel: Födelseprocessen med $\lambda_i = i^2\lambda$, $i \geq 1$, är irreguljär eftersom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[T_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2\lambda} < \infty.$$

Stationärfördelning för födelse-/dödsprocesser

Stationärfördelningen π måste uppfylla de lokala balansekvationerna:

$$\pi_{k-1}\lambda_{k-1} = \mu_k\pi_k.$$

Detta ger:

$$\pi_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \pi_{k-1} = \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}}{\mu_k\mu_{k-1}} \pi_{k-2} = \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2} \cdots \lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1} \cdots \mu_1} \pi_0.$$

Med $\rho_0 = 1$ och $\rho_n = \prod_{k=1}^n \lambda_{k-1}/\mu_k$ så uppfyller $\pi_k = \rho_k\pi_0$ ekvationen $\pi Q = \mathbf{0}$. Kan man sedan normalisera så att

$$1 = \sum_k \pi_k = \sum_k \rho_k \pi_0 = \pi_0 \sum_k \rho_k,$$

dvs välja $\pi_0 = 1/\sum_k \rho_k$, får vi en sannolikhetsfördelning som lösning och alltså den unika gränsfördelningen för den ergodiska födelse-/döds-processen. (Normaliseringen förutsätter att $\sum_k \rho_k < \infty$).

Exempel: M/M/1-systemet. Övergångsintensiteterna är $q_{k,k+1} = \lambda$, $q_{k+1,k} = \mu$ för $k \geq 0$. Fungerar som modell för ett kösystem där kunder kommer enligt en Poissonprocess med intensitet λ och kunders betjäningstid är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde $1/\mu$.

Lokal balans ger stationärfördelningen π måste uppfylla

$$\pi_k = \underbrace{\frac{\lambda}{\mu}}_{=\rho} \pi_{k-1} = \rho \pi_{k-1} = \rho^2 \pi_{k-2} = \dots = \rho^k \pi_0.$$

Vi har att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_0 \rho^k < \infty$$

om $\rho < 1$, dvs $\lambda < \mu$. Då gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_0 \rho^k = \pi_0 \frac{1}{1-\rho} = 1,$$

om $\pi_0 = 1 - \rho$. Alltså, om $\lambda < \mu$ existerar stationärfördelningen (och processen är ergodisk) och $\pi_k = (1 - \rho)\rho^k$.

Fördelningen kallas geometrisk fördelning och är släkt med ffg-fördelningen. Om X är Geo(p) så är $X' = X + 1$ ffg(p),

$$P(X = k) = P(X' - 1 = k) = P(X' = k + 1) = p(1 - p)^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Alltså

$$E[X] = E[X' - 1] = \frac{1}{1 - p} - 1 = \frac{p}{1 - p}$$

och

$$V(X) = V(X' - 1) = \frac{p}{(1 - p)^2}.$$