Jacksonnätverk

System av återkopplade $M/M/c$-system.

- Ankomster till station i, $i = 1, \ldots, d$ enligt en Poissonprocess med intensitet λ_i.
- Betjäningstiderna vid nod i är oberoende exponentialfördelade med väntevärden $1/\mu_i$.
- Markovska rutter i nätverket: en kund lämnar nod i och går till nod j med sannolikhet p_{ij}, oberoende av tidigare väg, och lämnar nätverket med sannolikhet $p_i = \sum_{j=1}^{d} p_{ij}$.

Alla storheter förutsätts vara oberoende.

Låt Λ_j vara den totala intensiteten ut ur nod j. Trafikbalans ger att Λ_j måste uppfylla

$$\Lambda_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{d} \Lambda_i p_{ij}.$$

Om $\rho_j = \Lambda_j/\mu_j < 1$, $j = 1, \ldots, d$, så är $(X_1(t), \ldots, X_d(t))_{t\geq 0}$ en ergodisk Markovkedja med stationärfördelning

$$\mathsf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d) = \mathsf{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathsf{P}(X_d = x_d) = \pi_1(x_1) \cdots \pi_d(x_d)$$

där $\pi_i(k)$ är fördelningen för det i ett stationärt $M/M/c$-system finns k enheter.

Exempel: Exempel på Jacksonnätverk

$$M/M/\infty$$

Här är $\mathsf{E}[X_q] = \mathsf{E}[S_q] = 0$ eftersom inga köer bildas. Upphållstiden är densamma som betjäningstiden, en exponentialfördelad stokastisk variabel. De lokala balansekvationerna blir

$$\lambda \pi_{k-1} = k\mu \pi_k, \quad k \geq 1,$$

så

$$\pi_k = \frac{\lambda}{k\mu}\pi_{k-1} = \frac{\lambda}{k\mu} \cdot \frac{\lambda}{(k-1)\mu}\pi_{k-2} = \cdots = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k(k-1)\cdots 1}\pi_0 = \frac{r^k}{k!}\pi_0.$$

Med $\pi_0 = \mathrm{e}^{-r}$ är $\boldsymbol{\pi}$ en sannolikhetsfördelning, den unika stationärfördelningen för den ergodiska processen. Vi känner igen fördelningen som Poissonfördelningen med parameter $r = \lambda/\mu$.

Om U är en exponentialfördelad betjäningstid med väntevärde m så är variationskoefficienten

$$\frac{\mathrm{D}(U)}{\mathsf{E}[U]} = \frac{m}{m} = 1.$$

Om man vill modellera system där betjäningstiderna har en variationskoefficient < 1 eller > 1 kan man konstruera en Markovmodell genom att falta eller blanda exponentialfördelningar.

Om $U_1, \ldots, U_n$ är oberoende exponentialfördelade med väntevärde m/n. Då har

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

väntevärde $\mathsf{E}[U] = m$ och varians $\mathrm{V}(U) = m^2/n$, vilket ger en variationskoefficient

$$\frac{\mathrm{D}(U)}{\mathsf{E}[U]} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

som kan göras godtyckligt liten. Man kan se det som att den totala betjäningstiden U består av n stycken exponentialfördelade faser, $U_1, \ldots, U_n$. Vi får en Markovkedja om vi håller rätt på antalet kunder i systemet samt i vilken fas personen som betjänas befinner sig i: $(X(t))_{t\geq 0}$ är en Markov-kedja på $\{0, 1, 2, \ldots\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$.

För variationskoefficient > 1 kan man göra blandningar. Om $U_1, \ldots, U_n$ är oberoende exponentialfördelade med distinkta väntevärden $m_1, \ldots, m_n$, och Θ en diskret stokastisk variabel med värdemängd $\{1, \ldots, n\}$ oberoende av $U_1, \ldots, U_n$.

Betjäningstiden $U = U_\Theta$ har variationskoefficient > 1.

Vi kan modellera detta kösystem med en Markovkedja på $\{0, 1, \ldots\} \times \{1, \ldots, n\}$ som håller reda på antalet kunder i systemet samt typen Θ på den kund som håller på att betjänas.

$M/G/1$

Godtycklig betjäningstid U. Betrakta mängden arbete $W(t)$ i systemet vid tiden t, dvs den totala återstående betjäningstiden för de som är närvarande vid tiden t.

$$\mathsf{E}[W] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t W(s)\, ds$$

Under tidsintervallet $[0, t]$ sker ankomster $1, 2, \ldots, \Lambda(t)$. Ankomst j tillbringar tiden S_j i kö och tiden U_j i betjäning.

$$\int_0^t W(s)\, ds = \sum_{i=1}^{\Lambda(t)} (S_j U_j + U_j^2/2) + \text{felterm}$$

Dividera med t och låt $t \to \infty$ vilket ger

$$\mathsf{E}[W] = \lambda(\mathsf{E}[S_q U] + \mathsf{E}\left[U^2\right]/2).$$

Oberoende mellan tid i kö och egen betjäningstid ger $\mathsf{E}[S_q U] = \mathsf{E}[S_q]\,\mathsf{E}[U]$. Dessutom, med Poissonankomster till FIFO-kö är $\mathsf{E}[S_q] = \mathsf{E}[W]$ så

$$\mathsf{E}[S_q] = \lambda(\mathsf{E}[S_q]\,\mathsf{E}[U] + \mathsf{E}\left[U^2\right]/2)$$

dvs

$$\mathsf{E}[S_q] = \frac{1}{1 - \lambda \mathsf{E}[U]} \lambda \mathsf{E}\left[U^2\right]/2 = \frac{1}{2(1-\rho)} \lambda \mathsf{E}\left[U^2\right].$$

Alltså, med $\mathsf{E}[X_q] = \lambda \mathsf{E}[S_q]$, fås

$$\mathsf{E}[X_q] = \frac{\lambda^2}{2(1-\rho)} \mathsf{E}\left[U^2\right]$$

där $\rho = \lambda \mathsf{E}[U]$.