Likformig fördelning i ändligt utfallsrum

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\} \qquad \mathsf{P}(\{\omega_i\}) = p_i = \frac{1}{n}.$$

för alla $i = 1, \ldots, n$. För en händelse A är då

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \frac{1}{n} \sum_{\omega_i \in A} 1 = \frac{\#\text{ element i } A}{\#\text{ element i } \Omega} = \frac{\#\text{ gynnsamma utfall}}{\#\text{ möjliga utfall}}.$$

Detta är sats 2.4 och kallas *den klassiska sannolikhetsdefinitionen* i kurslitteraturen.

Sats (Multiplikationsprincipen). Antalet sätt att utföra k operationer, där operation i kan utföras på n_i sätt, är

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k.$$

Antalet sätt vi kan välja ut k element bland n distinkta. (Sats 2.5–2.7)

	Med Återläggning	Utan Återläggning
Med Ordningshänsyn	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Utan Ordningshänsyn	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

MÅ/MO klar.

Exempel: Antalet bankomatkoder där $n = 10$ siffror väljs med återläggning $k = 4$ gånger med hänsyn till ordning. Totalt $n^k = 10^4 = 10000$ möjliga koder, dvs talen 0000 till 9999.

UÅ/MO:

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Exempel: Antalet möjliga kortblandningar. Välj $k = 52$ kort av $n = 52$ möjliga utan återläggning med hänsyn till ordning.

$$\frac{52!}{(52-52)!} = 52! = 80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766\,975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000$$

UÅ/UO: Beteckna talet med ${}_nC_k$. Ordna mängden för att få UÅ/MO:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k!\,{}_nC_k \quad \Rightarrow \quad {}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Talet

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

(utläses "n över k") kallas *binomialkoefficient* och förekommer flitigt i kursen.

Minns binomialteoremet:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Exempel: Antal Lottorader $\binom{35}{7} = 6\,724\,520$.

Fallet MÅ/UO visas inte.

Exempel: Antalet olika pizzabeställningar en grupp om 5 personer kan göra (menyn har 40 olika pizzor) är $\binom{40-1+5}{5} = 1\,086\,008$.

Betingad sannolikheter/oberoende händelser

Hur påverkar information om att en händelse inträffat sannolikheterna för att andra händelser gör det?

Introduktion: SPAM-filtrering. $n = 348$ mejl undersöks. Låt
$A = \{\text{"SPAM"}\}$, $B = \{\text{"innehåller texten FREE"}\}$.

Data sammanfattas i tabellen

	SPAM	ej SPAM	
FREE	17	1	18
ej FREE	172	158	330
	189	159	348

Det finns ett samband mellan om ett mejl är SPAM och det innehåller texten FREE eller ej. För ett på måfå valt mejl har vi $\mathsf{P}(A) = 189/348 = 0.543$. Givet information om att ett mejl innehåller texten FREE har vi istället $\mathsf{P}(A|B) = 17/18 = 0.9444 \neq \mathsf{P}(A)$.

Definition: Låt A, B vara två händelser med $\mathsf{P}(B) > 0$. Då definierar vi att sannolikheten för A betingat B ("A givet B"), $\mathsf{P}(A|B)$, som

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$$

Om händelsen B inte påverkar sannolikheten för att A inträffar så har vi $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$ och/eller $\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)$. Uttryckt med hjälp av definitionen av betingade sannolikheter

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$$

vilket leder det oss till definitionen:

Definition: A och B är oberoende om $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)$.

OBS! Oförenliga (disjunkta) händelser är **ej** oberoende!

Anmärkning. Om A och B är oberoende så är A och B^* oberoende och A^* och B^* oberoende.

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A \cap B) + \mathsf{P}(A \cap B^*) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A \cap B^*)\,.$$

Alltså är

$$\mathsf{P}(A \cap B^*) = \mathsf{P}(A)\,(1 - \mathsf{P}(B)) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B^*)\,,$$

vilket visar oberoendet mellan A och B^*. Upprepas resonemanget fås att A^* och B^* är oberoende.

Sats (Lagen om total sannolikhet, (2.9)). Låt $H_1, H_2, \ldots, H_n$ vara en partition av Ω, dvs $H_i \cap H_j = \varnothing$ då $i \neq j$, och $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$. Låt A vara en händelse, $\mathsf{P}(A) > 0$. Då kan A delas in i disjunkta delar, $A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap H_i)$, och

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A|H_i)\,\mathsf{P}(H_i)\,.$$

Ur definitionen för betingning får vi att sannolikheten för snitthändelsen kan beräknas på två sätt:

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \begin{cases} \mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B) \\ \mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A) \end{cases}$$

Alltså kan vi räkna ut

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A)}.$$

Om vi omformulerar $\mathsf{P}(A)$ med hjälp av lagen om total sannolikhet får vi Bayes sats.

Sats (Bayes sats (2.10)). Under samma antaganden som i 2.9

$$\mathsf{P}(H_i|A) = \frac{\mathsf{P}(A|H_i)\,\mathsf{P}(H_i)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A|H_i)\,\mathsf{P}(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(A|H_j)\,\mathsf{P}(H_j)}.$$

Exempel (Sjukdomsdiagnostik): I detta konstruerade exempel låt $A = \{\text{"Diagnos sjuk"}\}$ och $B = \{\text{"Patient sjuk"}\}$.

$$\mathsf{P}(B) = 0.01 \text{ (prevalens)} \quad \mathsf{P}(A|B) = 0.9999 \text{ (sensitivitet)} \quad \mathsf{P}(A^*|B^*) = 0.995 \text{ (specificitet)}.$$

Med $H_1 = B$ och $H_2 = B^*$ som partition är

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A|B^*|B^*)\,\mathsf{P}(B^*) = 0.9999 \cdot 0.01 + 0.005 \cdot 0.99 = 0.014949$$

och

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{0.9999 \cdot 0.01}{0.9999 \cdot 0.01 + 0.005 \cdot 0.99} = 0.669.$$

Samma typ av uträkning ger även sannolikheten att en friskförklarad person är sjuk

$$\mathsf{P}(B|A^*) = \frac{0.000001}{0.000001 + 0.985050} = 1.02 \cdot 10^{-6}.$$