OBS! SISTA INLÄMNINGSDAG
UPPGIFT 3 i DAG 3/11

SATS: KEDJA (ÄNDLIGT MÅNGA TILLSTÅND ÄR ERGODISK ⟺

1/ BARA EN SLUTEN (INGA PILAR UT)

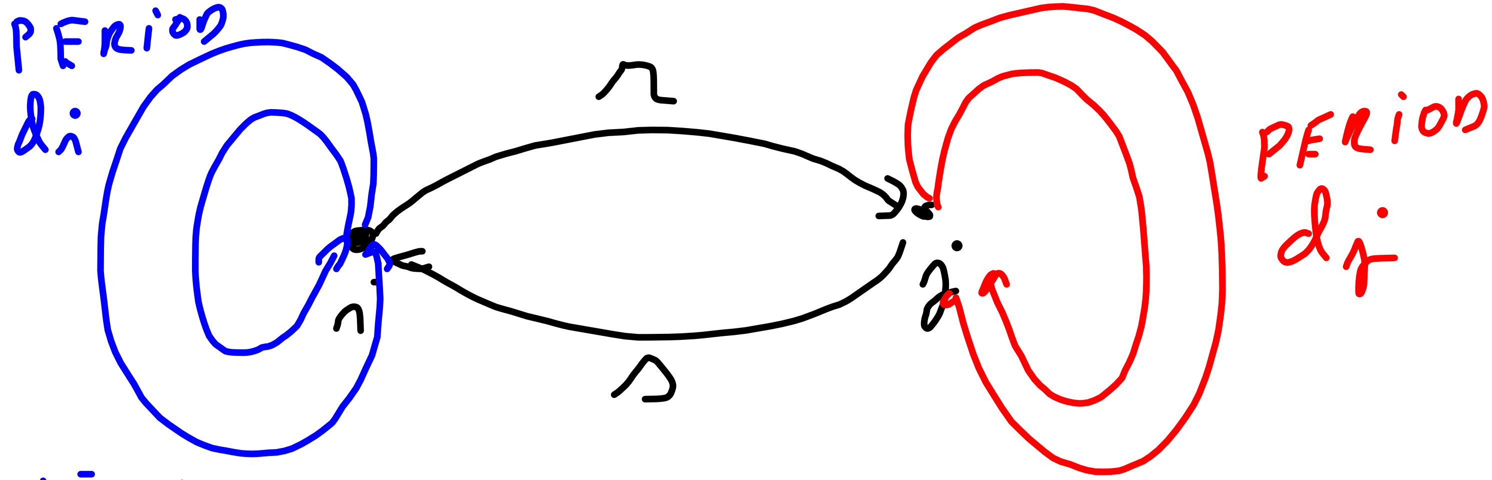
IRREDUCIBEL DELTILLSTÅNDS (ALLA KOMMUNICERAR

MÄNGD OCH DENNA ÄR

APERIODISK

(PERIOD = 1)

PERIOD = STÖRSTA FAKTOR I UTFLYKTS-LÄNGDER




LÄNGDER AV UTFLYKTERNA = MULTIPLAR AV PERIODEN

$$\Rightarrow d_i = d_j$$

PERIOD = 1

METOD: HITTA TVÅ UTFLYKTER VARS LÄNGDER ÄR RELATIV PRIMA.

Ex 3 4

$E = \{1, 2, 3, 4\}$

TURISTRESA $\quad 1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 4$

5 LÅNG $\quad 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 2 \to 3$

6 LÅNG

---

PERIOD = 1

OM $P_{ii} > 0$ ÄR PERIODEN = 1

OM ERGODISK $P(X_n = j \mid X_0 = i) \to \pi_j$

DÄR $\underline{\pi} = (\pi_j ; j \in E)$ ÄR GRÄNS-FÖRDELNINGEN (MÅSTE VARA STATIONÄRA FÖRD.)

$$\begin{cases} \underline{\pi} = \pi P \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

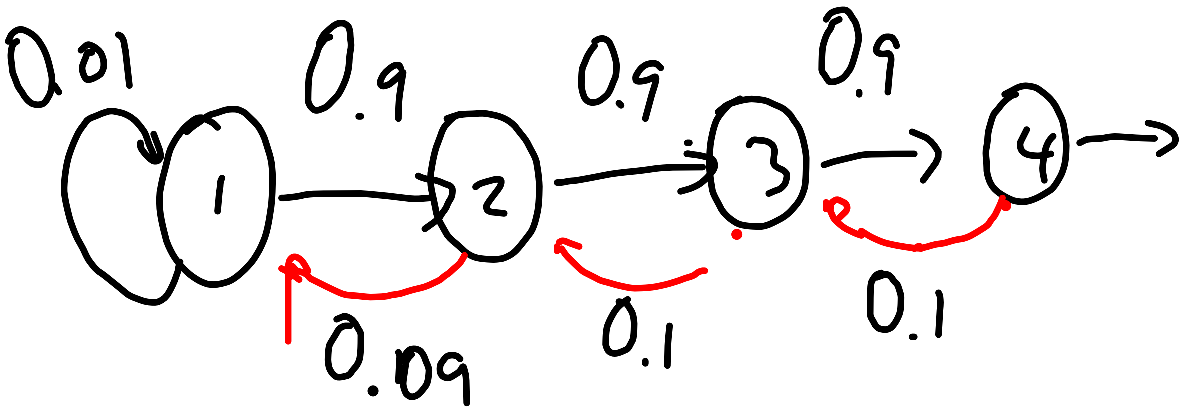
MAN KAN STRYKA VILKEN SOM HELST !!

$$\begin{cases} (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{P} \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

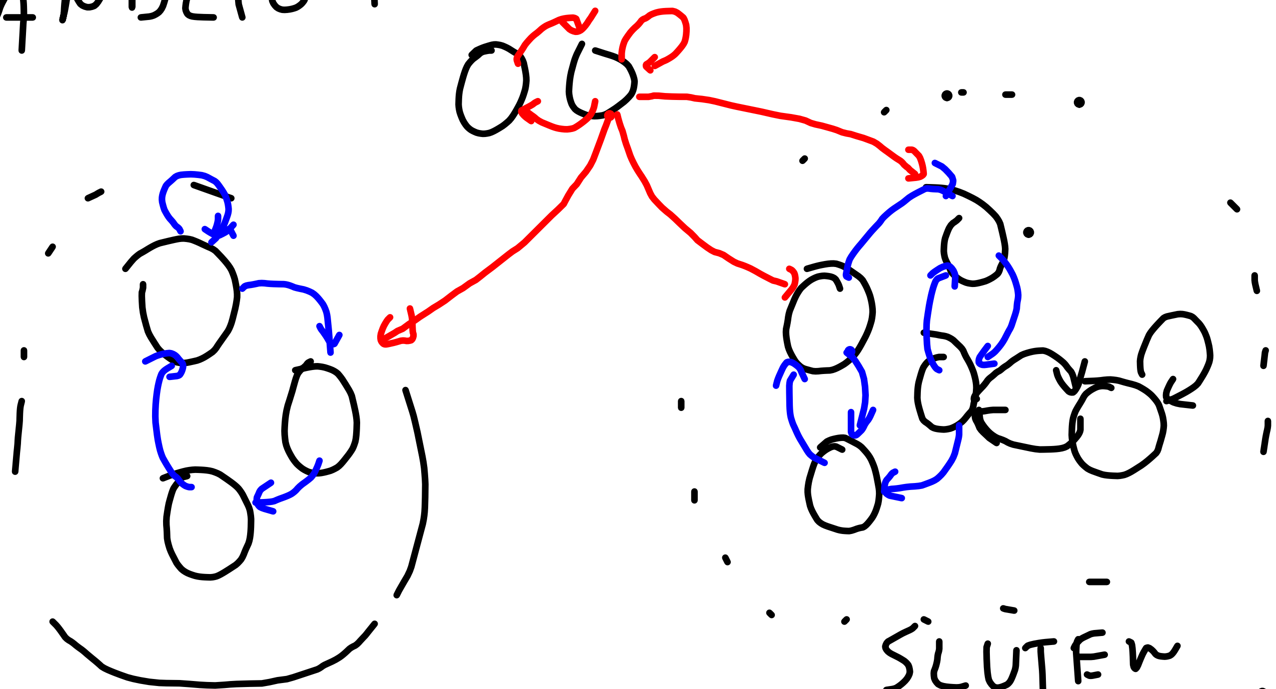
$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = (1, \pi_2, \pi_3)$$

$\underbrace{\text{OÄNDLIGA}}_{\text{ANTAL TILLSTÅND}}$ KEDJOR

KOMPLIKATION (MÖJLIG): KEDJAN KAN FÖRSVINNA UT I $\infty$.



# ALLMÄNT UPPTRÄDANDE AV ÄNDLIGA KEDJOR



SLUTEN
IRRED
PERIOD = 1

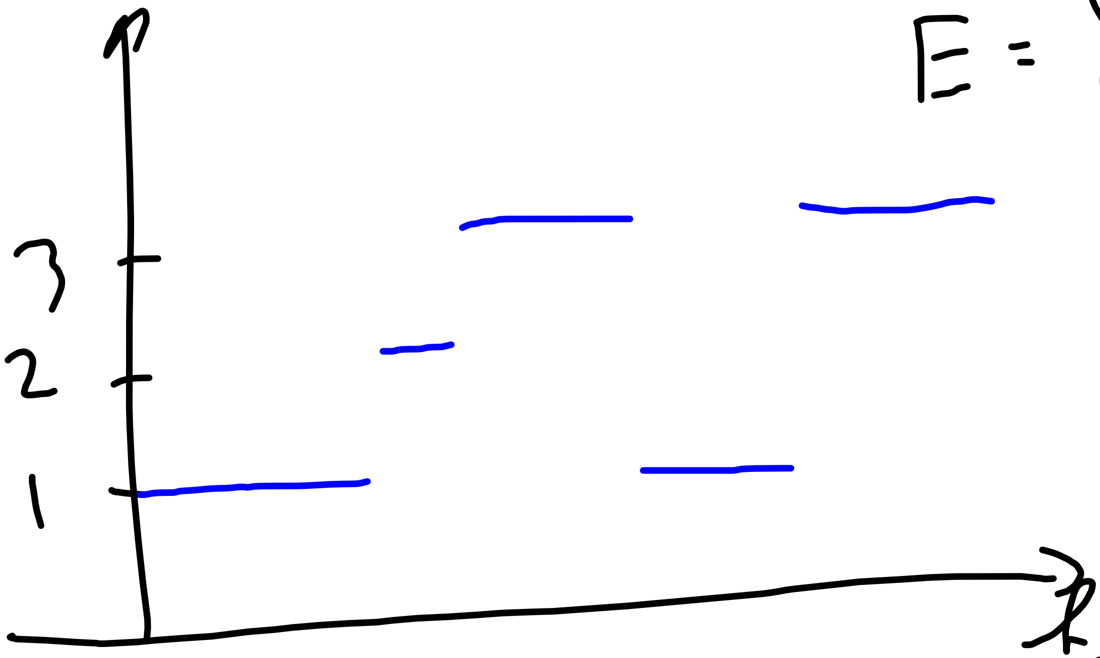
SLUTEN
IRREDUCIBEL
PERIOD = 1

# KONTINUERLIG TID

$(X(t);\ t \geq 0)$

E ÄNDLIGT (NUMRERBART)

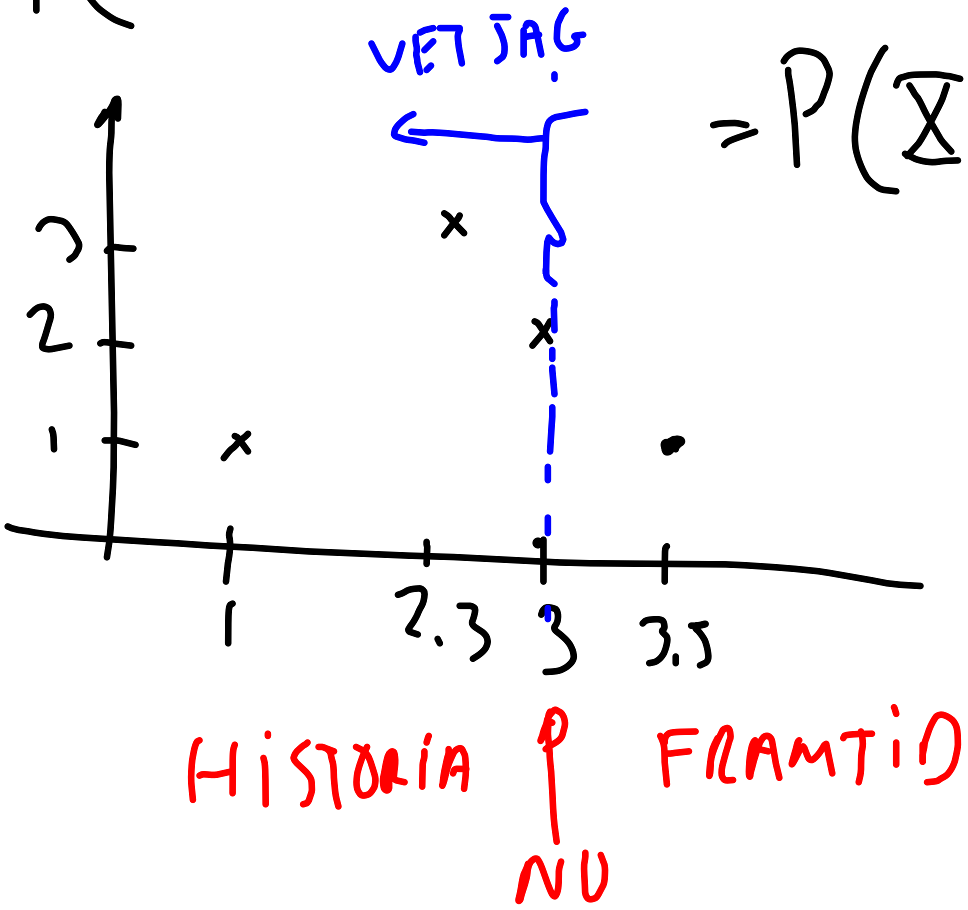
$E = \{1, 2, 3\}$




ANTAG: REGULJÄR DVS POSITIVA UPPEHÅLLSTIDER. ÄNDLIGT MÅNGA ÖVERGÅNGAR PÅ ÄNDLIG TID

$$P\big(X(3.5)=1 \mid X(1)=1,\ X(2.3)=3,\ X(3)=2\big)$$

$$= P\big(X(3.5)=1 \mid \underbrace{X(3)=2}_{\text{SISTA TIDPUNKT !!}}\big)$$



$$P(X(t+s)=j \mid X(s)=i) = p_{ij}(t)$$

TIDSSKILLNAD $t \geq 0$

BEROR EJ AV $s$

(TIDSHOMOGENITET

$$P(X(t)=j \mid X(0)=i) = p_{ij}(t)$$

$$P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in E}$$

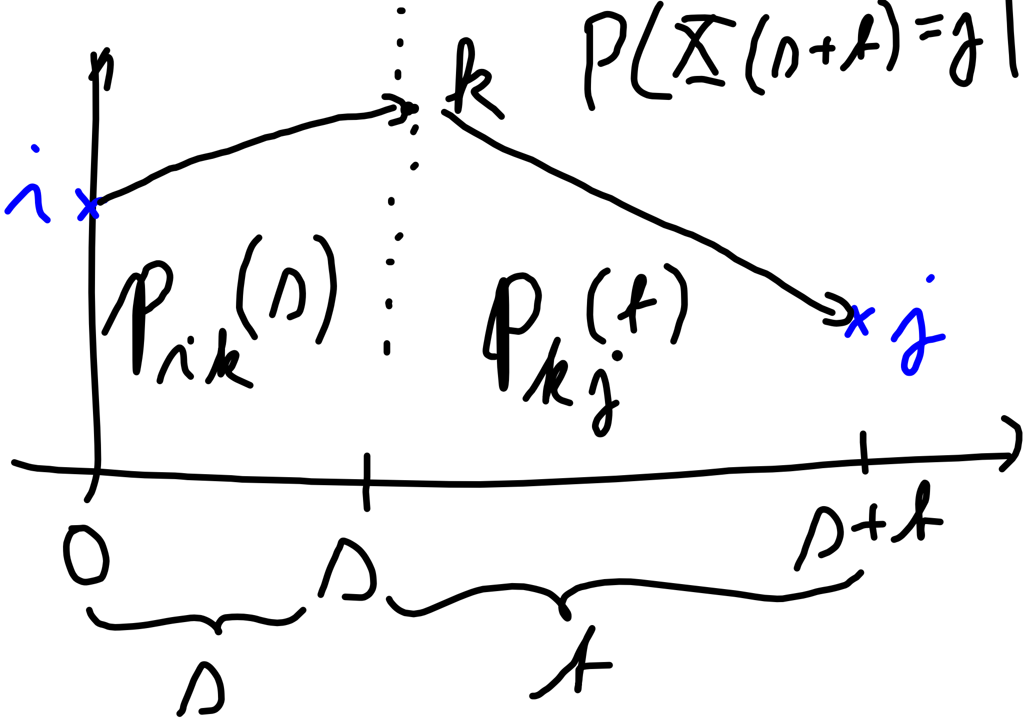
RADSUMMA = 1

# CHAPMAN-KOLMOGOROVS EKV.

$$\underbrace{p_{ij}(s+t)}_{P(X(s+t)=j \mid X(0)=i)} = \sum_{k\in E} p_{ik}(s)\,p_{kj}(t)$$

$$P(X(s+t)=j \mid X(s)=k;\ \cancel{X(0)=i})$$

MARKOV



$$P(t+s) = P(s)\cdot P(t) = P(t)\cdot P(s)$$

MATRISER

$$P(X(t)=i) = p_i(t)$$

$$\underline{p}(t) = (p_i(t);\ i \in E) \quad \text{RADVEKTOR.}$$

$$= (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) =$$

$$= (P(X(t)=1), P(X(t)=2), P(X(t)=3))$$

SUMMA = 1

$\underline{p}(0)$ = INITIALFÖRDELNING

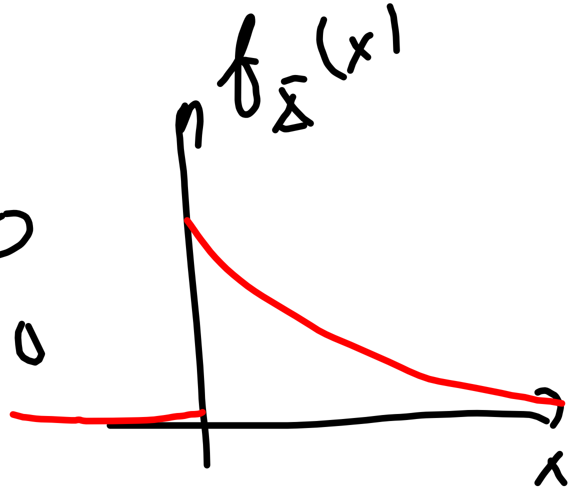
$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)\, P(t)$$

(Jfr $\underline{p}^{(n)} = \underline{p}^{(0)} \cdot P^n$ DISKRET TID.)

SVÅRT ANGE $P(t)$-MATRIS!!

$\mathcal{E}xp(\lambda)$ - FÖRDELNING

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$




$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

MINNESLÖSHET $\quad T$ är $\mathrm{Exp}(\lambda)$

$s, t \geq 0$

$$P(T > t+s \mid T > s) = \frac{P(T > t+s \,;\, \cancel{T > s})}{P(T > s)}$$

$\Big($ Jfr $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$s = 23$

$t = 7$ $\Big)$

$$= \frac{P(T > t+s)}{P(T > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$$

$$= P(T > t)$$

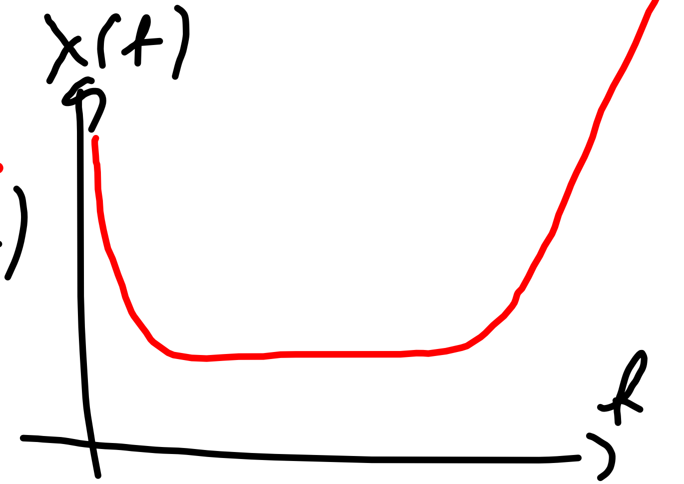
BEROR EJ AV $s$!!

INTENSITET $\qquad h \geq 0 \quad t \geq 0$

$$\lambda(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P(t \leq T \leq t+h \mid T > t) =$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \frac{P(t \leq T \leq t+h \,;\, T > t)}{\underbrace{P(T > t)}_{1 - F_T(t)}}$$

$$\approx \frac{1}{h} \frac{f_T(t) \cdot h}{1 - F_T(t)} = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(1 - F_T(t))$$




BADKARSKURVA

$$F_T(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(u)\,du}$$

SPEC. FALL $T$ ÄR $Exp(\lambda)$

$$\lambda(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} \equiv \lambda$$

BEROR EJ AV $t$!!

ALLMÄNT

$$P(t \leq T \leq t+h \mid T > t) \simeq \lambda(t) \cdot h$$

FÖR $Exp$ $P(t \leq T \leq t+h \mid T > t) \simeq \lambda \cdot h$

$$P(T \le h) = 1 - e^{-\lambda h} \approx 1 - (1 - \lambda h + o(h))$$

$$\approx \lambda h \underbrace{+\, o(h)}_{\text{SKIPPA}}$$

---

$T_1$ är $Exp(\lambda_1)$ OCH $T_2$ är $Exp(\lambda_2)$

OCH OBER.

$$U = \min(T_1, T_2)$$

$$P(U > t) = P(T_1 > t\,; T_2 > t) = \overbrace{P(T_1 > t)}^{e^{-\lambda_1 t}} \cdot \overbrace{P(T_2 > t)}^{e^{-\lambda_2 t}}$$

$= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ DVS $U$ är $Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$

$$P(T_1 < T_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

OBER. AN $\min(T_1, T_2)$