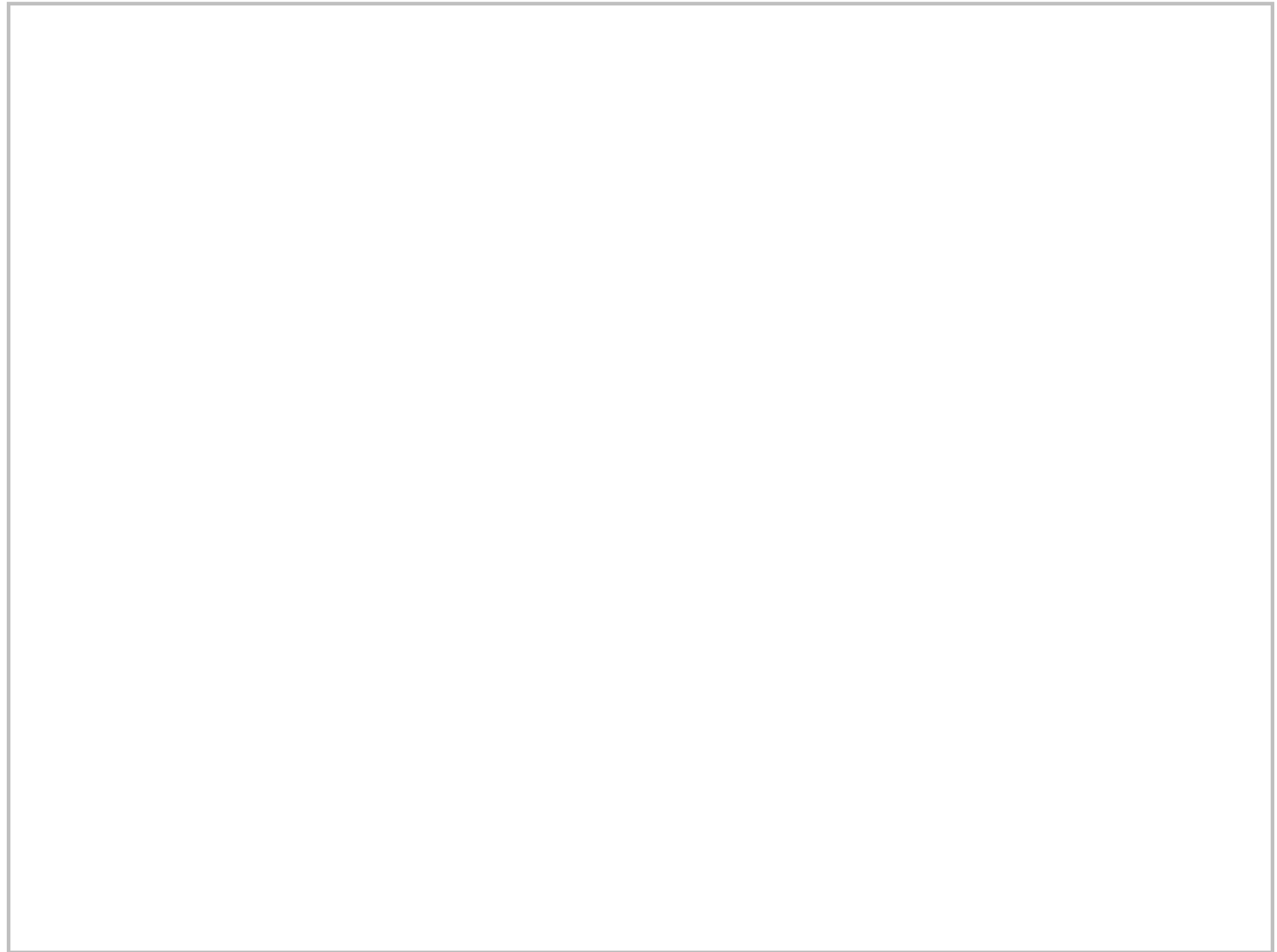


$$P_{ij}(h) = P_{ij}(0) + h \cdot \underbrace{P'_{ij}(0)}_{< 0} + \sigma(h) = P_{ii}(0)$$

$$= \begin{cases} 1 + h P'_{ii}(0) & i=j \\ 0 + h P'_{ij}(0) & i \neq j \end{cases} + \sigma(h)$$

$$Q = P'(0) = \text{ÖVERGÅNGSINTENSITÄTSMATRIS}$$

$$P(h) = P(0) + h \cdot Q + \sigma(h) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{EWERTSMATRIS}}} I + h \cdot Q + \sigma(h) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



OBS! Q ÄR LÄTT ATT
STÄLLA UPP !!

$$P(t+h) = P(t) \cdot P(h) = P(h) \cdot P(t)$$

$$\frac{1}{h} (P(t+h) - P(t)) = \frac{1}{h} P(t) (P(h) - I)$$

$$P'(t) = P(t) \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(h) - I}{h} = P(t) Q$$

$$P'(t) = Q P(t) \quad P(0) = I$$

KAN LÖSAS!

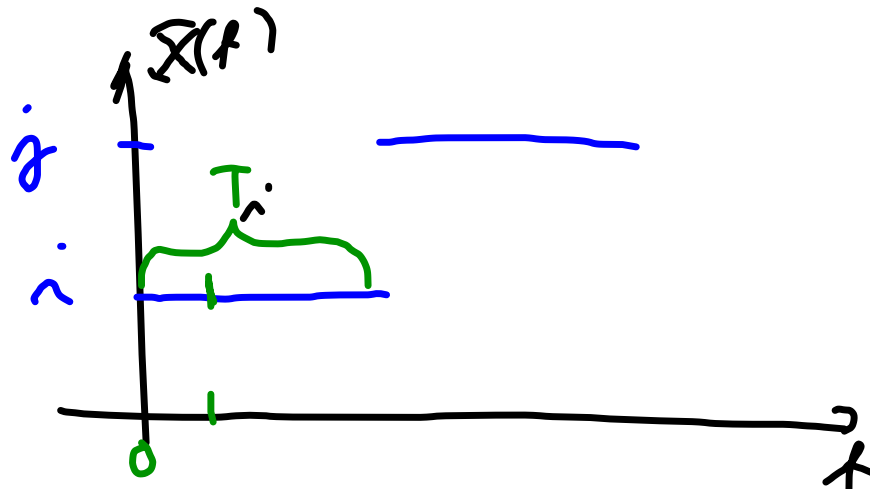
$$P'(t) = P(t) Q$$

KLAR !!
ALL !!

KLARAR Vi

$$P(t) = P(0) P(t)$$

$$\begin{aligned} P'(t) &= P(0) P'(t) = \\ &= \underbrace{P(0) \cdot P(t)}_{P(t)} \cdot Q = P(t) Q \end{aligned}$$



MARKOVSKT (MINNESCÖST)

$$P(T_i > t + \Delta | T_i > t) = P(T_i > t)$$

DVS T_i ÄR $\text{Exp}(q_i)$

$$P(T_i \leq h) = 1 - \underbrace{e^{-q_i h}}_{1 - q_i h} \approx q_i h + o(h)$$

HOPP FÖR h

$$P(\text{Hopp ur i efter } h) = 1 - q_i h + o(h)$$

$$\text{för } P(\underbrace{X(h)=i | X(0)=i}_{P_{ii}(h)}) = 1 + q_{ii} h + o(h)$$

$$\text{DVS } q_{ii} = -q_i$$

q_i : Tid i tillstånd i är $\exp(q_i)$

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & & \\ & -q_2 & \\ & & -q_3 \end{pmatrix}$$

$$i \neq j \quad P_{ij}(h) = \underbrace{P(X(h)=j | X(0)=i)}_{\text{HOPP FRÅN } i \text{ TILL } j} = q_{ij}h + o(h)$$

$$P(\text{HOPPA ÖVER HUVUDTAGET PÅ } h) =$$

$$= \left(\sum_{\substack{j \in E \\ i \neq j}} q_{ij} \right) h + o(h)$$

$$q_{ii} < 0$$

$$q_{ij} \geq 0 \quad i \neq j$$

$$P(\text{HOPP TILL } j \mid \text{HOPP UR } i) = \frac{q_{ij}}{\sum_{k \neq i} q_{ik}} = \frac{q_{ij}}{q_i} = \frac{q_{ij}}{-q_{ii}}$$

$$P(t) \text{ HAR RADSUMMA} = 1$$

$$\text{RAD 1: } P_{11}(t) + P_{12}(t) + P_{13}(t) = 1$$

$$P'_{11}(t) + P'_{12}(t) + P'_{13}(t) = 0$$

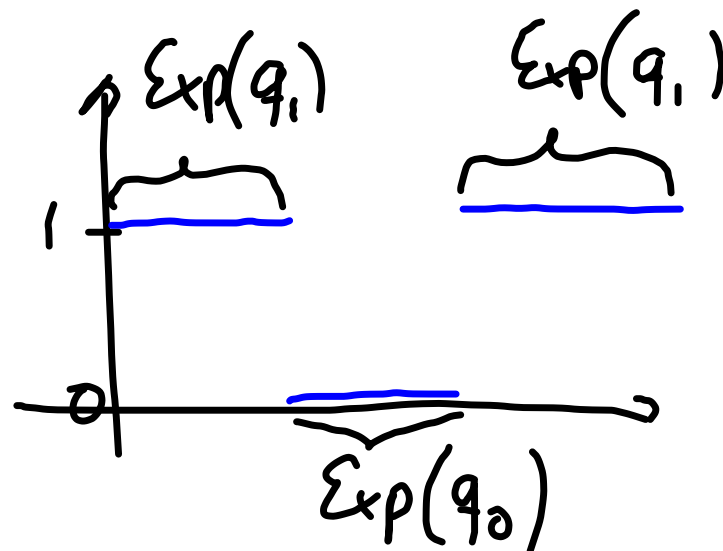
$$t=0 \text{ GEN } q_{11} + q_{12} + q_{13} = 0$$

$$\text{DVS } Q \text{ HAR RADSUMMA} = 0$$

Σ

$$E = \{0, 1\}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_0 \\ q_1 & -q_1 \end{pmatrix}$$



$$\underline{P}(0) = (1, 0)$$

$$\underline{X}(0) = 0$$

$$\underline{P}(t) = (\underbrace{P(\underline{X}(t)=0)}_{P_0(t)}, \underbrace{P(\underline{X}(t)=1)}_{P_1(t)})$$

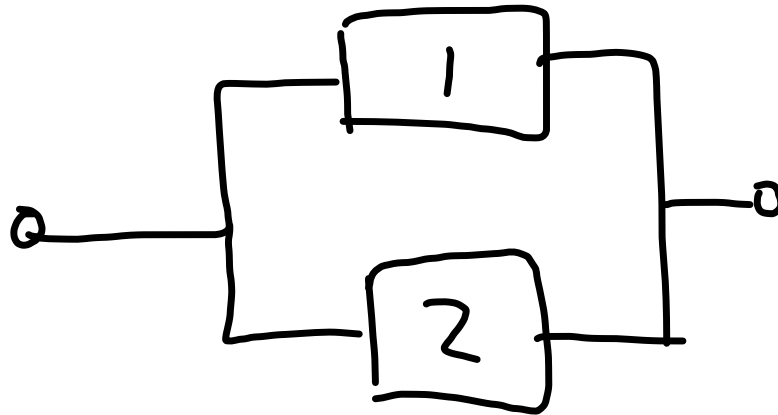
$$\underline{P}'(t) = \underline{P}(t) Q$$

$$P_1(t) = 1 - P_0(t)$$

$$\begin{cases} P_0'(t) = -q_0 P_0(t) + q_1 P_1(t) \\ P_1'(t) = q_0 P_0(t) - q_1 P_1(t) \end{cases}$$

$$P_0(0) = 1 \quad P_1(0) = 0$$

E₄



① REPARATION TAR

② — — — — —
 $E_1 =$ BÅDA FUNGERAR
 $E_2 =$ 1 FUNKAR, 2 TRASIG
 REP.

① FUNKTIONSTID
 $\text{Exp}(\lambda_1)$

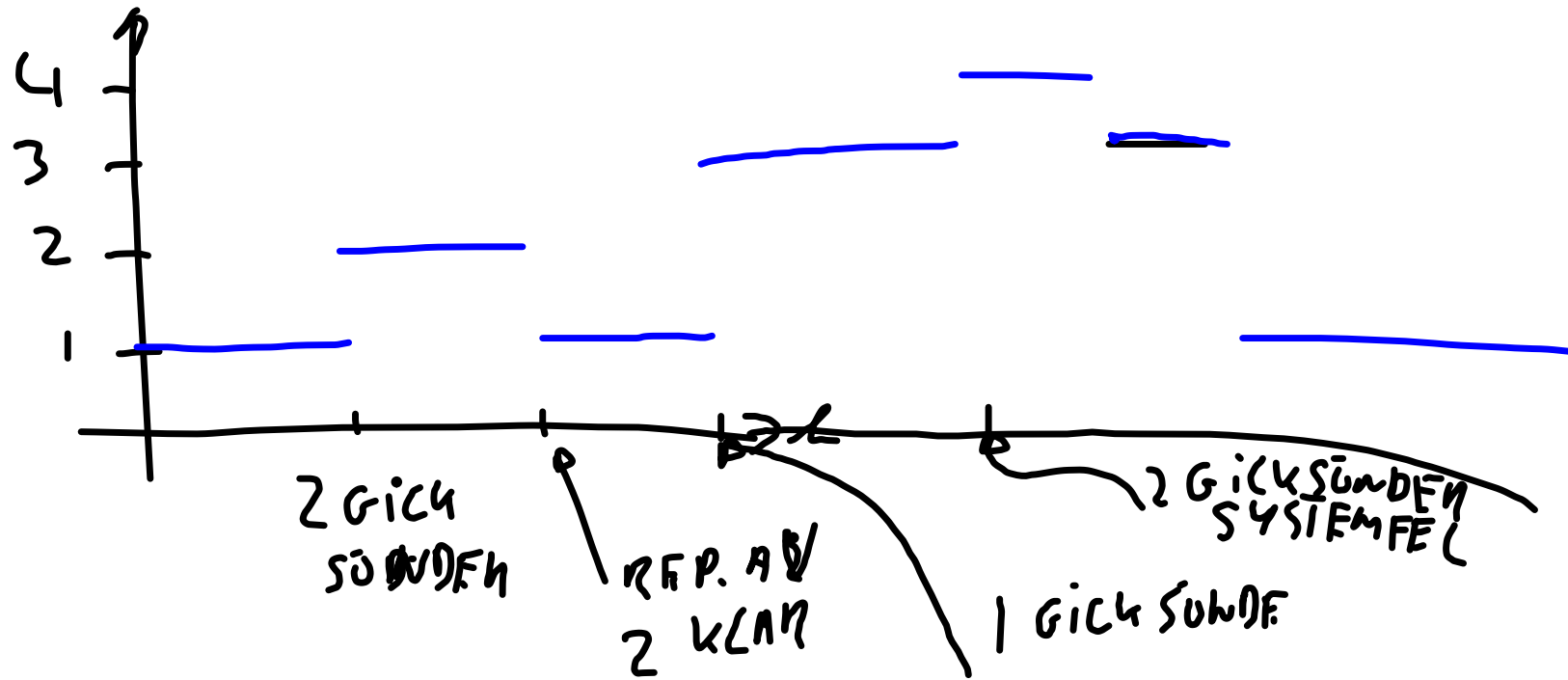
② FUNKTIONSTID
 $\text{Exp}(\lambda_2)$

$\text{Exp}(\mu_1)$ -FÖRD. TID.

$\text{Exp}(\mu_2)$ -FÖRD. TID.

$E_3 =$ 2 TRASIG, 1 FUNKAR

$E_4 =$ BÅDA TRASIGA
 (SYSTEMFEL)



LÄTT ATT FÅ Q
 BÅDA FUNKTIONER

$$\begin{matrix}
 & & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix}
 -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\
 \mu_2 & -(\lambda_1 + \mu_2) & 0 & \lambda_1 \\
 \mu_1 & 0 & -(\lambda_2 + \mu_1) & \lambda_2 \\
 0 & \mu_1 & \mu_2 & -(\mu_1 + \mu_2)
 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

Q = 2
 1 OK
 2 TRASIG
 { 1 TRASIG
 2 OK
 BÅDA TRASIGA

KLAR!!

$T_1 =$ TID TILL 1 GÅR SÖNDER $\text{Exp}(\lambda_1)$

$T_2 =$ - " - 2 - " - $\text{Exp}(\lambda_2)$

FÖRSTA HOPP $T = \min(T_1, T_2) = \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$
UPPGIFT 4.16

$$q_{11} = -(\lambda_1 + \lambda_2)$$

HOPP TILL 2: 2 GÅR SÖNDER FÖRST

$$P_{12}(h) = P(T_1 > h; T_2 \leq h) = \underbrace{P(T_1 > h)}_{\approx 1} \cdot \underbrace{P(T_2 \leq h)}_{\lambda_2 \cdot h}$$

HOPP TILL 3 :

$$P_{13}(h) = P(T_1 \leq h; T_2 > h) = \dots = \lambda_1 h + o(h)$$

$$q_i = -q_{ii} \quad \text{TID I TILLSTÄND } i$$

$$\text{ÄR} \quad \text{Exp}(q_i)$$

$$P(\text{HOPP TILL } j \mid \text{HOPP FRÅN } i) = \frac{q_{ij}}{q_i} = \frac{q_{ij}}{-q_{ii}}$$

Ex

$$Q = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 2 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

TID 1: $\text{Exp}(8)$
TID 2: $\text{Exp}(5)$
TID 3: $\text{Exp}(2)$

EFTER 1: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ TILL 2 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ TILL 3

EFTER 2: $\frac{2}{5}$ TILL 1 $\frac{3}{5}$ TILL 3

EFTER 3: HOPP TILL 2

STATIONÄR FÖRDELNING

DISKRET TID

$$\underline{\Pi} = \underline{\Pi} P$$

$$\underline{\Pi} = \underline{\Pi} P(t) = \underline{\Pi} (I + Q \cdot t + r(t))$$

$$Q = \underline{\Pi} Q t + \underline{\Pi} \cdot r(t)$$

$$\begin{cases} \underline{0} = \underline{\Pi} Q \\ \sum_{i \in F} \pi_i = 1 \end{cases}$$

ERGODISK??

SATS: EN ÄNDLIG IRREDUCIBEL KEDJA
ÄR ERGODISK.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \Pi \quad \text{OAVSETT } P(0)$$

POISSON-PROCESS

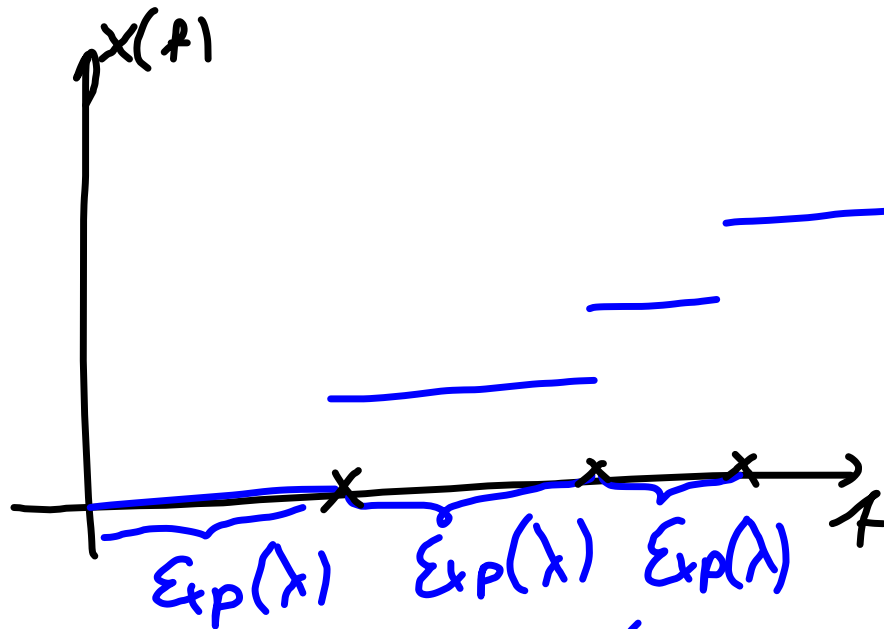
$$E = \{0, 1, 2, \dots\}$$

DEF 1 $\underline{a}$ $\underline{X}(0) = 0$

$\underline{X}$ MARKOVPROCESS MFD

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

UPPEHÅLLSTIDEN $\frac{1}{\lambda}$. HOPP 1 STEG UPPÅT !!



RÄKNEPROCESS

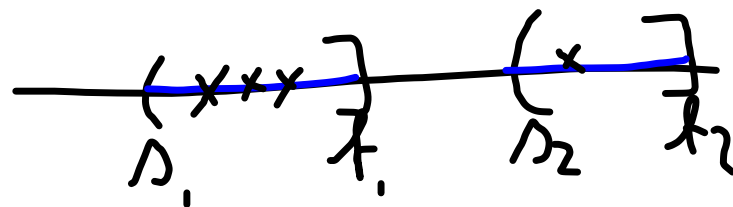
MODELL FÖR HÄNDELSER SOM ÄR
FULLSTÄNDIGA I TIDEN.
'ÖBER.'

DEF 2: $(X(t); t \geq 0)$ ÄR EN POISSONPROCESS
MED INTENSITET λ

(1) $X(0) = 0$

(2) $X(t) - X(s)$ ÄR $Po(\lambda(t-s))$ $s \leq t$

(3) OBEROENDE TILLSKOTT PÅ
DISTINKTA TIDINTERVALL

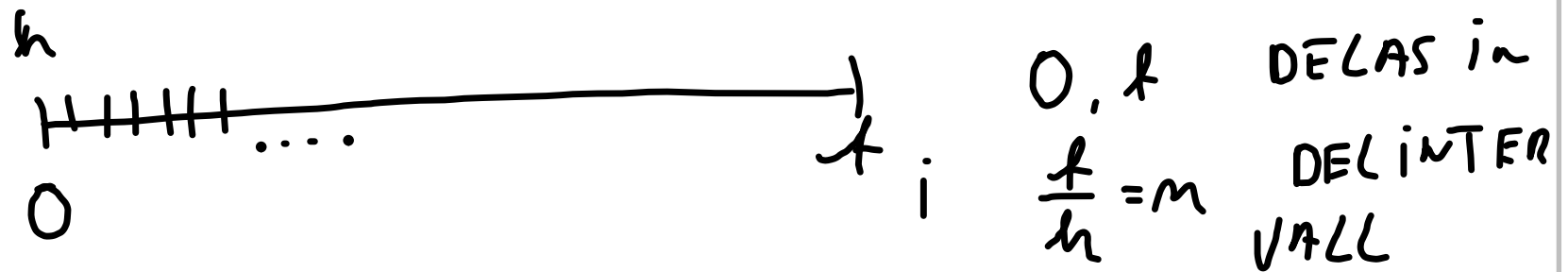


$$X(t_1) - X(s_1)$$

$$X(t_2) - X(s_2)$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{X}(t) \text{ in } P_0(\lambda t) \quad T = T_i D \text{ i } O: A \sim \\
 & P(T > t) = P(\underbrace{\bar{X}(t) = 0}_{P_0(\lambda t)}) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}
 \end{aligned}$$

$$T \text{ är } \text{Exp}(\lambda) !!$$



$$P(x \text{ i intervall } h) = \lambda \cdot h + o(h)$$

OLIKA INTERVALL OBER. AV VARNANDRA

$$X(t) = \text{ANTAL } x \text{ i int } (0, t]$$

$$\text{Bin}(n, \lambda h + o(h)) \approx \text{Poi}(n\lambda h) = \text{Poi}(\lambda t)$$

