

Introduktion

Om matstatkursen: Att ge grundläggande kunskaper i sannolikhetslära och statistisk inferens samt att ge förståelse för och färdigheter i tillämpningen av dessa vetenskapsgrenar på konkreta problem.

Upplägg:

- Sannolikhetsteori, kapitel 1–8
- Beskrivande statistik, kapitel 10
- Statistikteori, kapitel 9, 11–14
- Markovteori, kapitel 1–7 i Markovkompendium

Grundläggande terminologi

Slumpförsök: Ett försök där resultatet inte på förhand kan avgöras.

Utfall: Resultat av ett slumpförsök

Utfallsrum: Mängden av alla utfall. Betecknas Ω .

Händelse: En uppsättning intressanta utfall, en delmängd av utfallsrummet.

Exempel: Slumpförsök: ett tärningskast. Utfallsrummet $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ändligt). Exempel på händelser: $A = \{\text{”udda antal prickar”}\} = \{1, 3, 5\}$. $B = \{\text{”minst fem”}\} = \{5, 6\}$.

Exempel: Slumpförsök: Ringa CSN tills man kommer fram. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ (uppräknligt). $C = \{\text{”minst 10 ggr”}\} = \{10, 11, 12, \dots\}$.

Exempel: Slumpförsök: livslängd glödlampa. $\Omega = \{x \geq 0 : x \in \mathbb{R}\}$ (överuppräknligt oändligt).

Händelser som mängder

Vi kan illustrera två händelser A och B för samma slumpförsök med en figur, ett så kallat Venn-diagram.

Händelse		Mängd
$\{\text{”} A \text{ inträffar”}\}$		A
$\{\text{”} A \text{ eller } B \text{ inträffar”}\}$	union	$A \cup B$
$\{\text{”} A \text{ och } B \text{ inträffar”}\}$	snitt	$A \cap B$
$\{\text{”} A \text{ inträffar inte”}\}$	komplement	A^*

Observera att beteckningen för komplementet inte är standardiserat.

Den tomma mängden $\emptyset$ betecknar en omöjlig händelse.

Exempel: $A^* = \{\text{”udda antal poäng”}\}^* = \{\text{”jämnt antal poäng”}\} = \{2, 4, 6\}$. $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$, $A \cap B = \{5\}$, $A \cap A^* = \emptyset$.

Om $A \cap B = \emptyset$ sägs händelserna vara *oförenliga* (ömsesidigt uteslutande), det vill säga, mängderna är *disjunkta*.

Sannolikheten för en händelse A betecknas $P(A)$.

Tolkning: Upprepa slumpförsöket n gånger och låt n_A vara antalet gånger som händelsen A inträffar. Då:

$$\frac{n_A}{n} \rightarrow P(A)$$

då $n \rightarrow \infty$. Detta är *Stora talens lag* som kommer att visas i en form senare i kursen.

Kolmogorovs axiom: Ett mått P (funktion definierade på händelser) är ett sannolikhetsmått om:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. Om A och B är två oförenliga händelser, $A \cap B = \emptyset$, så är $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
 Detta generaliseras till godtyckligt antal oförenliga händelser: $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

Notera att $A \cap A^* = \emptyset$ så

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^*) = P(A) + P(A^*).$$

Vi har således visat följande intuitivt riktiga sats.

Sats (2.1). $P(A^*) = 1 - P(A)$.

Sats (2.2 i Blom).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Bevis: Notera att

$$P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap B^*)) = P(A \cap B) + P(A \cap B^*)$$

så $P(A \cap B^*) = P(A) - P(A \cap B)$. Nu är

$$P(A \cup B) = P(B \cup (A \cap B^*)) = P(B) + P(A \cap B^*) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Konstruktion av sannolikhetsmått för uppräknliga utfallsrum (2.4):

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$$

Vi kan då till varje utfall ω_i i Ω tillskriva ett tal p_i som uppfyller

1. $0 \leq p_i \leq 1$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Låter vi $P(\{u_i\}) = p_i$ ser vi att P uppfyller definitionen för ett sannolikhetsmått och det är helt OK att tolka p_i som sannolikheter för de enskilda utfallen.

$$P(A) = P\left(\bigcup_{u_i \in A} \{u_i\}\right) = \sum_{u_i \in A} P(\{u_i\}) = \sum_{u_i \in A} p_i.$$

Likformig fördelning i ändligt utfallsrum

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \quad \mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i = \frac{1}{n}.$$

för alla $i = 1, \dots, n$. För en händelse A är då

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \frac{1}{n} \sum_{\omega_i \in A} 1 = \frac{\# \text{ element i } A}{\# \text{ element i } \Omega} = \frac{\# \text{ gynnsamma utfall}}{\# \text{ möjliga utfall}}.$$

Detta är sats 2.4 och kallas *den klassiska sannolikhetsdefinitionen* i kurslitteraturen.

Sats (Multiplikationsprincipen). Antalet sätt att utföra k operationer, där operation i kan utföras på n_i sätt, är

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k.$$