

Stokastiska processer

En familj av stokastiska variabler $\{X(t); t \in T\}$ kallas för en stokastisk process. Indexmängden T kan ofta tolkas som olika tidpunkter. Om T är uppräknelig sägs processen vara tidsdiskret, om $T = [0, \infty)$ sägs den vara tidskontinuerlig. Tillståndsmängden för processen, E , kan även vara diskret eller kontinuerligt. Vi kommer enbart att betrakta diskreta tillståndsmängder och inledningsvis ändliga, dvs. $E = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$.

För en stokastisk process med uppräkneligt E är

$$\begin{aligned} P(X(t_0) = x_0, \dots, X(t_n) = x_n) \\ &= P(X(t_0) = x_0) \cdot \\ &\quad P(X(t_1) = x_1 | X(t_0) = x_0) \cdots \\ &\quad P(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_0) = x_0) \end{aligned}$$

för $t_0, \dots, t_n \in T$.

Definition: Den stokastiska processen sägs vara en *Markovprocess* om

$$P(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_0) = x_0) = P(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1})$$

för alla $n \geq 1$, $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ och tillstånd $x_0, \dots, x_n$.

Detta innebär att för en Markovprocess är

$$\begin{aligned} P(X(t_0) = x_0, \dots, X(t_n) = x_n) \\ &= P(X(t_0) = x_0) P(X(t_1) = x_1 | X(t_0) = x_0) \cdots P(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}) \end{aligned}$$

för $t_0 < t_1 < \dots < t_n \in T$.

Markovprocessen kallas *tidshomogen* om $P(X(t+s) = j | X(s) = i)$ inte beror på s , dvs

$$P(X(t+s) = j | X(s) = i) = P(X(t) = j | X(0) = i) = p_{ij}(t)$$

för alla $i, j \in E$.

Matrisform

Låt i fortsättningen $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, dvs vi betraktar en tidsdiskret Markovkedja.

Övergångssannolikheterna samlas i en övergångsmatris

$$\begin{aligned} P^{(n)} &= [P(X_n = j | X_0 = i)]_{i,j} = [p_{ij}(n)]_{i,j} \\ P &= P^{(1)} = [P(X_1 = j | X_0 = i)]_{i,j} = [p_{ij}]_{i,j} \end{aligned}$$

där radsummorna i övergångsmatriserna är 1. Notera att E kan vara oändligt stor vilket ger "matriser" med oändligt många rader och kolumner.

Vi har att

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+m)} &= P(X_{n+m} = j | X_0 = i) = \sum_k P(X_{m+n} = j, X_n = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_{m+n} = j | X_n = k, X_0 = i) P(X_n = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_{m+n} = j | X_n = k) P(X_n = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k p_{kj}^{(m)} p_{ik}^{(n)} \end{aligned}$$

dvs elementen i $n + m$ -stegsövergångsmatrisen fås som elementen i $\mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{P}^{(m)}$. Dvs,

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(1+(n-1))} = \mathbf{P}^{(1)} \cdot \mathbf{P}^{(n-1)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{(n-1)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{(n-2)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \dots \mathbf{P} = \mathbf{P}^n.$$

$\mathbf{P}^{(0)}$ identifieras som $\mathbf{I}$, enhetsmatrisen.

Komponenterna i radvektorn $\mathbf{p}^{(n)}$ av absoluta sannolikheter

$$\mathbf{p}^{(n)} = [\mathbf{P}(X_n = j)]_j,$$

där $\mathbf{p}^{(0)}$ är begynnelse- (initial-) -fördelningen, är

$$\mathbf{p}_j^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = j) = \sum_i \mathbf{P}(X_n = j | X_0 = i) \mathbf{P}(X_0 = i) = \sum_i p_{ij}^{(n)} \mathbf{p}_i^{(0)}$$

dvs komponenterna i vektorn $\mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^{(n)}$.

Sammanfattning:

Chapman-Kolmogorov

1. $\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{P}^{(m)}$.
2. $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$.
3. $\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^{(n)}$.

Absorbtion

Ett tillstånd i sådant att $p_{ii} = 1$ kallas *absorberande*. Icke-absorberande tillstånd från vilka man direkt eller indirekt kan komma till ett absorberande tillstånd kallas *genomgångstillstånd*. En Markovkedja som enbart har genomgångstillstånd och absorberande tillstånd kallas *A-kedja*, dvs $E = A \cup G$ där $A \cap G = \emptyset$.

Vi skall för en ändlig A-kedja fånga storheter som

1. $a_{ij} = \mathbf{P}(\text{Kedjan absorberas i } j \text{ givet start i } i) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$.
Notera att $a_{ij} = 0$ för $j \in G$ och $a_{ij} = 0$ för $i \in A$ då $j \neq i$.
2. $T_i = \text{tiden till absorbtion givet start i } i$. $T_i = 0$ för $i \in A$. $t_i = \mathbf{E}[T_i]$.

Sannolikheterna a_{ij} uppfyller

$$a_{ij} = \sum_k p_{ik} a_{kj} = p_{ij} + \sum_{k \in G} p_{ik} a_{kj}$$

för alla $i \in G, j \in A$.

På matrisform:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{GG} & \mathbf{P}_{GA} \\ \mathbf{P}_{AG} & \mathbf{P}_{AA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{GG} & \mathbf{P}_{GA} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

dvs $\mathbf{P}_{GA}$ och $\mathbf{P}_{GG}$ är övergångsmatriserna som fås om man bara betraktar övergångar g- till a-tillstånd respektive g- till g-tillstånd. Då är $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j}$ en $|G| \times |A|$ -matris sådan att

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{GA} + \mathbf{P}_{GG} \mathbf{A}$$

vilket ger $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{GG}) \mathbf{A} = \mathbf{P}_{GA}$ eller

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{GG})^{-1} \mathbf{P}_{GA}.$$

Med $t_i = E[\text{tiden till absorbtion} | \text{start i } i]$. För tiderna t_i gäller

$$t_i = 1 + \sum_k p_{ik} t_k = 1 + \sum_{k \in G} p_{ik} t_k$$

för alla $i \in G$. Med $\mathbf{t}$ som kolumnvektor fås matrisformuleringen

$$\mathbf{t} = \mathbf{1} + \mathbf{P}_{GG} \mathbf{t}$$

eller

$$\mathbf{t} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{GG})^{-1} \mathbf{1}$$

där $\mathbf{1}$ är kolumnvektorn med ettor.

Vi utnyttjar här att för en händelse A definieras det betingade väntevärdet

$$E[T|A] = \sum_k k P(T = k|A).$$

samt lagen om total förväntan: om $A_1, \dots, A_n$ är händelser som partitionerar ett utfallsrum så är

$$\begin{aligned} E[T] &= \sum_k k P(T = k) = \sum_k k \sum_j P(T = k|A_j) P(A_j) = \sum_j P(A_j) \sum_k k P(T = k|A_j) \\ &= \sum_j E[T|A_j] P(A_j). \end{aligned}$$

Vi kan tillämpa detta med en initialfördelning $\mathbf{p}^{(0)}$. Det obetingade väntevärdet är då

$$E[\text{Tid till absorbtion}] = \sum_j t_j \mathbf{p}_j^{(0)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{t}.$$