

Låt $(X_n; n \geq 0)$ vara en tidsdiskret Markovkedja med övergångsmatris $\mathbf{P}$. Vad händer efter lång tid, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = j | X_0 = i)$?

Definition: Om $p_{ij}^{(n)} > 0$ för något $n \geq 0$ sägs i leda till j , skrivet $i \rightarrow j$. Om $i \rightarrow j$ och $j \rightarrow i$ sägs i och j kommunicera. Om alla tillstånd kommunicerar sägs kedjan vara irreducibel.

Detta medför att tillståndsrummen delas upp i klasser av kommunicerande tillstånd (irreducibla delklasser). Vad som händer efter lång tid beror på dessa klasser.

Absorbtion

Antag att tillståndsrummet är ändligt med tillstånd i sådana att $p_{ii} = 1$ (absorptionstillstånd) och att alla andra tillstånd direkt eller indirekt leder till dessa, dvs $E = A \cup G$ där $A \cap G = \emptyset$.

Med $a_{ij} = \mathbf{P}(\text{Kedjan absorberas i } j \text{ givet start i } i) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ så uppfyller a_{ij} ekvationssystemet

$$a_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in G} p_{ik} a_{kj}$$

för alla $i \in G, j \in A$.

På matrisform:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{GG} & \mathbf{P}_{GA} \\ \mathbf{P}_{AG} & \mathbf{P}_{AA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{GG} & \mathbf{P}_{GA} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

dvs $\mathbf{P}_{GA}$ och $\mathbf{P}_{GG}$ är övergångsmatriserna som fås om man bara betraktar övergångar g- till a-tillstånd respektive g- till g-tillstånd. Då är $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j}$ en $|G| \times |A|$ -matris sådan att

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{GA} + \mathbf{P}_{GG}\mathbf{A}$$

vilket ger $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{GG})\mathbf{A} = \mathbf{P}_{GA}$ eller

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{GG})^{-1} \mathbf{P}_{GA}.$$

Med $t_i = \mathbf{E}[\text{tiden till absorbtion} | \text{start i } i]$. För tiderna t_i gäller

$$t_i = 1 + \sum_{k \in G} p_{ik} t_k$$

för alla $i \in G$. Med $\mathbf{t}$ som kolumnvektor fås matrisformuleringen

$$\mathbf{t} = \mathbf{1} + \mathbf{P}_{GG}\mathbf{t}$$

eller

$$\mathbf{t} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{GG})^{-1} \mathbf{1}$$

där $\mathbf{1}$ är kolumnvektorn med ettor.

För en händelse A definieras det betingade väntevärdet

$$\mathbf{E}[T|A] = \sum_k k \mathbf{P}(T = k | A).$$

Sats (Lagen om total förväntan). Om $A_1, \dots, A_n$ är händelser som partitionerar ett utfallsrum så är

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[T] &= \sum_k k \mathbf{P}(T = k) = \sum_k k \sum_j \mathbf{P}(T = k | A_j) \mathbf{P}(A_j) = \sum_j \mathbf{P}(A_j) \sum_k k \mathbf{P}(T = k | A_j) \\ &= \sum_j \mathbf{E}[T | A_j] \mathbf{P}(A_j). \end{aligned}$$

Vi kan tillämpa detta med en initialfördelning $\mathbf{p}^{(0)}$. Det obetingade väntevärdet är då

$$\mathbb{E}[\text{Tid till absorption}] = \sum_j t_j \mathbf{p}_j^{(0)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{t}.$$

Tidsinvarianta fördelningar

Definition: En fördelning π kallas för *stationärfördelning* till en Markovkedja med övergångsmatris $\mathbf{P}$ om

$$\pi = \pi \mathbf{P}.$$

Om man en Markovkedja har initialfördelning $\mathbf{p}^{(0)} = \pi$ så är

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^{(n)} = \pi \mathbf{P}^n = \pi \mathbf{P} \mathbf{P}^{n-1} = \pi \mathbf{P}^{n-1} = \dots = \pi \mathbf{P} = \pi$$

för alla $n \geq 0$. Om $\mathbf{p}^{(n)}$ konvergerar måste gränsvärdet vara en stationärfördelning.

Definition: Om

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}^{(n)}$$

existerar och inte beror av $\mathbf{p}^{(0)}$ sägs Markovkedjan vara *ergodisk*.

Sats. En Markovkedja med ändligt tillståndsrum har minst en stationär fördelning.

Sats. En irreducibel Markovkedja har högst en stationär fördelning.

Speciellt: Ändlig + irreducibel medför en unik stationärfördelning. Följande sats ger tillräckliga villkor för att den även är en gränsfördelning.

Sats. En aperiodisk irreducibel Markovkedja med ändligt tillståndsrum är ergodisk.

Definition: För tillstånd i låt

$$D_i = \{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Låt d_i vara den största gemensamma delaren till talen i D_i . Talet d_i kallas *periodtiden* och om $d_i > 1$ kallas tillståndet i *periodiskt*, annars *aperiodiskt*. Kommunicerande tillstånd har samma periodtid.

Sats (Ergodicitetens huvudsats). För en ergodisk markovkedja $(X_n; n \geq 0)$ och en funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(X_k) = \mathbb{E}[f(X)]$$

där X har fördelning π , stationärfördelningen för Markovkedjan.

Sats. För en ergodisk kedja med stationärfördelning π . Då är

$$\mathbb{E}[\text{tid mellan två besök i } i] = \frac{1}{\pi_i}$$

$$\mathbb{E}[\text{Antal besök i tid i tillstånd } j \text{ mellan två besök i } i] = \frac{\pi_j}{\pi_i}.$$

Bevis: Antag att i är ett tillstånd i den slutna irreducibla delklassen av tillstånd och låt kedjan börja i tillstånd i , dvs. $\mathbb{P}(X_0 = i) = 1$.

Då är sekvensen $T_1, T_2, \dots$ av återkomsttider till i en sekvens av oberoende och likafördelade stokastiska variabler. Stora talens lag ger att

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k T_i = \mathbf{E}[T_i].$$

Låt funktionen $f(x) = 1$ om $x = i$ och 0 annars. Tag X med fördelning π . Då är

$$\mathbf{E}[f(X)] = 1 \cdot \mathbf{P}(X = i) + 0 \cdot \mathbf{P}(X \neq i) = \pi_i$$

och enligt ergocitetssatsen

$$\pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{T_1 + \dots + T_k} = \frac{1}{\mathbf{E}[T_i]}.$$

På samma sätt visas det andra påståendet.