

Om

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n)$$

existerar och inte beror av  $\mathbf{p}(0)$  sägs Markovkedjan vara *ergodisk*.

**Sats.** En aperiodisk irreducibel Markovkedja med ändligt tillståndsrum är ergodisk.

**Definition:** För tillstånd  $i$  låt

$$D_i = \{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Låt  $d_i$  vara den största gemensamma delaren till talen i  $D_i$ . Talet  $d_i$  kallas *periodtiden* och om  $d_i > 1$  kallas tillståndet  $i$  *periodiskt*, annars *aperiodiskt*. Kommunicerande tillstånd har samma periodtid.

**Exempel:** Väderleksexempel. Med tillstånd

$$E = \{\text{uppehåll, regn, snö}\} = \{1, 2, 3\}$$

och övergångsmatris

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.15 & 0.05 \\ 0.10 & 0.70 & 0.20 \\ 0.20 & 0.30 & 0.50 \end{pmatrix}$$

fås en ändlig, irreducibel och aperiodisk markovkedja. Den unika stationärfördelningen  $\boldsymbol{\pi} = (0.40, 0.40, 0.20)$  är en gränsfördelning.

**Sats.** För en ergodisk kedja med stationärfördelning  $\boldsymbol{\pi}$ . Då är

$$E[\text{tid mellan två besök i } i] = \frac{1}{\pi_i}$$

$$E[\text{Antal besök i tid } i \text{ tillstånd } j \text{ mellan två besök i } i] = \frac{\pi_j}{\pi_i}.$$

(Beviskiss.)

**Exempel:** Väderleksexempel.

$$E[\text{Nederbördsdagar mellan två uppehåll}] = \frac{1}{\pi_1} - 1 = \frac{1}{0.40} - 1 = 1.5$$

$$E[\text{Snöddagar mellan två uppehåll}] = \frac{\pi_3}{\pi_1} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5.$$

## Tidsdiskreta Markovkedjor med oändligt antal tillstånd

Viktig konsekvens: existensen av någon stationärfördelning inte given.

Låt  $T_i$  vara tiden att gå från  $i$  tillbaka till  $i$ . Tre fall:

$$\begin{array}{ll} P(T_i < \infty) < 1 & i \text{ transient} \\ P(T_i < \infty) = 1, E[T_i] = \infty & i \text{ noll-rekurrent} \\ E[T_i] < \infty & i \text{ positivt rekurrent} \end{array}$$

Satserna innan generaliseras om "ändlig" irreducibel Markovkedja ersätts med "positivt rekurrent" irreducibel Markovkedja.

## Markovkedjor i kontinuerlig tid

Nu bildas matriser av övergångssannolikheter

$$\mathbf{P}(t) = [X(t) = j | X(0) = i]_{i,j}$$

som uppfyller Chapman-Kolmogorovs ekvationer:

1.  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ .
2.  $\mathbf{P}(s+t) = \mathbf{P}(s) \cdot \mathbf{P}(t)$ .
3.  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)$

för alla  $s, t \geq 0$ .

Vi definierar *intensiteterna*

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}(X(h) = j | X(0) = i), \quad j \neq i \\ q_i &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}(X(h) \neq i | X(0) = i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [1 - \mathbf{P}(X(h) = i | X(0) = i)] \end{aligned}$$

Vi förutsätter att derivatorna existerar och är ändliga. Vidare förutsätter vi att

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

Alltså är

$$\mathbf{P}(X(t+h) = j | X(t) = i) \approx q_{ij}h \quad \mathbf{P}(X(t+h) = i | X(t) = i) \approx 1 - q_i h.$$

Dynamik: Markovkedjan tillbringar en exponentialfördelad tid i tillstånd  $i$  med väntevärde  $1/q_i$ . Därefter hoppar kedjan till tillstånd  $j \neq i$  med sannolikhet  $\tilde{p}_{ij} = q_{ij}/q_i$ .

**Definition:** Intensitetsmatrisen för en tidskontinuerlig Markovkedja definieras som  $\mathbf{Q} = [q_{ij}]_{ij}$  där  $q_{ii} = -q_i$ .

Exempel: Intensitetsmatrisen

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

motsvaras av att tiderna i tillstånden är exponentialfördelade med väntevärden  $1/5$ ,  $1$  resp.  $1/4$  och har hoppmatris

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notera att

$$\mathbf{Q} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{P}(h) - \mathbf{I})$$

där alla radsummor i matrisen  $\mathbf{Q}$  är 0. (Alternativt: för små  $h$  är  $\mathbf{P}(h) \approx \mathbf{I} + h\mathbf{Q}$ .)

Matrisen  $\mathbf{P}(t) = [p_{ij}(t)]_{ij}$  bestäms som lösning till följande differentialekvationer:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathbf{P}(t+h) - \mathbf{P}(t)] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathbf{P}(t)\mathbf{P}(h) - \mathbf{P}(t)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathbf{P}(h)\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}(t)[\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}]\mathbf{P}(t) \\
&= \mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t).
\end{aligned}$$

Detta kallas för Kolmogorovs framåt- respektive bakåtekvationer.

Anmärkning: bakåtekvationerna har alltid (minst en) lösning, framåtekvationerna kan sakna lösning.

Med hjälp av framåtekvationerna får vi att de absoluta sannolikheterna uppfyller:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}.$$

**Sats.** En sannoliketsfördelning  $\boldsymbol{\pi}$  uppfyller

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} \quad \left( \text{alt. } \pi_j q_j = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij}, \text{ alla } j \right)$$

om och endast om den är en stationärfördelning för Markovkedjan med intensitetsmatris  $\mathbf{Q}$ .

Bevis: Om  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}(t)$  så är med framåtekvationen  $\mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}'(t) = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{Q}$ .

Omvänt: Om  $\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$  så med  $\mathbf{p}(0) = \boldsymbol{\pi}$  är  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)$  och  $\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \boldsymbol{\pi}\mathbf{Q}\mathbf{P}(t) = \mathbf{0}$  det vill säga  $\mathbf{p}(t)$  är konstant.

Exempel: Intensitetsmatrisen

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

ger balansekvationerna

$$5\pi_1 = 0\pi_2 + 2\pi_3 \quad 1\pi_2 = 4\pi_1 + 2\pi_3 \quad 4\pi_3 = 1\pi_1 + 1\pi_2$$

som entydigt bestämmer  $\boldsymbol{\pi}$  upp till en multiplikativ konstant. Kravet att  $\boldsymbol{\pi}$  är en sannolikhetsfördelning ger lösningen

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \frac{2}{25} & \frac{18}{25} & \frac{5}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .08 & .72 & .20 \end{bmatrix}.$$

**Sats.** Om Markovkedjan är ändlig existerar minst en stationärfördelning.

**Sats.** Om Markovkedjan är irreducibel existerar högst en stationärfördelning.

**Sats.** Om Markovkedjan är ändlig och irreducibel är den tidskontinuerliga Markovkedjan ergodisk.