

Stationärfördelning för födelse-/dödsprocesser

Stationärfördelningen π måste uppfylla de lokala balansekvationerna:

$$\pi_{k-1}\lambda_{k-1} = \mu_k\pi_k.$$

Detta ger:

$$\pi_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\pi_{k-1} = \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}}{\mu_k\mu_{k-1}}\pi_{k-2} = \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdots\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\cdots\mu_1}\pi_0.$$

Med $\rho_0 = 1$ och $\rho_n = \prod_{k=1}^n \lambda_{k-1}/\mu_k$ så uppfyller $\pi_k = \rho_k\pi_0$ ekvationen $\pi Q = \mathbf{0}$. Kan man sedan normalisera så att

$$1 = \sum_k \pi_k = \sum_k \rho_k\pi_0 = \pi_0 \sum_k \rho_k,$$

dvs välja $\pi_0 = 1/\sum_k \rho_k$, får vi en sannolikhetsfördelning som lösning och alltså den unika gränsfördelningen för den ergodiska födelse-/döds-processen. (Normaliseringen förutsätter att $\sum_k \rho_k < \infty$).

Exempel: M/M/1-systemet. Övergångsintensiteterna är $q_{k,k+1} = \lambda$, $q_{k+1,k} = \mu$ för $k \geq 0$. Fungerar som modell för ett kösystem där kunder kommer enligt en Poissonprocess med intensitet λ och kunders betjäningstid är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde $1/\mu$.

Lokal balans ger stationärfördelningen π måste uppfylla

$$\pi_k = \underbrace{\frac{\lambda}{\mu}}_{=\rho} \pi_{k-1} = \rho\pi_{k-1} = \rho^2\pi_{k-2} = \cdots = \rho^k\pi_0.$$

Vi har att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_0 \rho^k < \infty$$

om $\rho < 1$, dvs $\lambda < \mu$. Då gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_0 \rho^k = \pi_0 \frac{1}{1-\rho} = 1,$$

om $\pi_0 = 1 - \rho$. Alltså, om $\lambda < \mu$ existerar stationärfördelningen (och processen är ergodisk) och $\pi_k = (1 - \rho)\rho^k$.

Fördelningen kallas geometrisk fördelning och är släkt med ffg-fördelningen. Om X är Geo(p) så är $X + 1$ ffg(p). Alltså

$$E[X] = E[(X+1) - 1] = \frac{1}{1-\rho} - 1 = \frac{\rho}{1-\rho}$$

och

$$V(X) = V((X+1) - 1) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

$$M/M/c$$

Poissonankomster, oberoende exponentialfördelade betjäningstider, c betjänare. Med $\rho = \lambda/c\mu < 1$ existerar stationärfördelningen

$$\pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{c-1} \frac{c^k \rho^k}{k!} + \frac{c^c \rho^c}{c!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} \quad \pi_k = \pi_0 \frac{(c\rho)^k}{k!}, \quad k = 1, \dots, c \quad \pi_{c+k} = \pi_c \rho^k, \quad k \geq 0.$$

Låt X ha fördelningen π . Sannolikheten att en kund anländande till ett stationärt $M/M/c$ -system får vänta är

$$P(\text{vänta}) = P(X \geq c) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = c + k) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{c+k} = \pi_c \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \pi_c \frac{1}{1-\rho}.$$

Med X_q som det stationära antalet kunder i kö är

$$E[X_q] = E[\max(X - c, 0)] = \sum_{k=0}^{\infty} k \pi_{k+c} = \dots = \pi_c \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = P(\text{vänta}) \frac{\rho}{1-\rho}$$

Låt S_q vara tiden en anländande kund tillbringar i kö när ankomster betjänas i turordning (FIFO-disciplin).

$$P(S_q > t) = \dots = P(\text{vänta}) e^{-c\mu(1-\rho)t}$$

Inför en stokastisk variabel I sådan att $P(I = 1) = 1 - P(I = 0) = P(\text{vänta})$ och S' exponentielfördelad med väntevärde $1/c\mu(1-\rho)$ oberoende av I . Då är $S_q = I \cdot S'$. Speciellt får vi att

$$E[S_q] = E[I \cdot S'] = E[I] E[S'] = P(\text{vänta}) \cdot \frac{1}{c\mu(1-\rho)}.$$

Vidare, med S som tiden en ankommande kund tillbringar i ett stationärt system har väntevärde

$$E[S] = E[S_q] + E[\text{betjäningstid}] = P(\text{vänta}) \cdot \frac{1}{c\mu(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}.$$

Slutligen,

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \pi_k = \dots = c\rho + E[X_q].$$

Little's formler

$$\underbrace{E[X_q]}_{=l_q} = \lambda \underbrace{E[S_q]}_{=w_q} \quad \underbrace{E[X]}_{=l} = \lambda \underbrace{E[S]}_{=w} \quad E[S] = E[S_q] + E[\text{betjäningstid}]$$

Med Little's formler får vi den genomsnittliga tiden i kö

$$E[S_q] = \frac{1}{\lambda} E[X_q] = \frac{1}{\lambda} P(\text{vänta}) \frac{\lambda/c\mu}{1-\rho} = P(\text{vänta}) \frac{1}{c\mu(1-\rho)}.$$

Tidsreversibilitet

Låt $(X_t)_{t \geq 0}$ vara en stationär Markovkedja. För $i \neq j$ är

$$\begin{aligned} P(X(t) = j | X(t+h) = i) &= \frac{P(X(t) = j, X(t+h) = i)}{P(X(t+h) = i)} \\ &= \frac{P(X(t+h) = i | X(t) = j) P(X(t) = j)}{P(X(t+h) = i)} \\ &= P(X(t+h) = i | X(t) = j) \frac{\pi_j}{\pi_i} \end{aligned}$$

Detta ger att Markovkedjan i baklängestid har övergångsintensiteter

$$q'_{ij} = q_{ji} \pi_j / \pi_i,$$

En stationär födelse-/döds-process uppfyller

$$\pi_i q_{ij} = q_{ji} \pi_j \quad (\text{dvs } \pi_i \lambda_i = \pi_{i+1} \mu_{i+1})$$

vilket innebär att $q_{ij} = q'_{ij}$, dvs framåtkedjan och bakåtkedjan har samma fördelning. Födelse-/döds-processer är tidsreversibla.

Ett stationärt $M/M/c$ -system är tidsreversibelt. I det reverserade systemet är ankomstprocessen en Poissonprocess med intensitet λ och ankomster efter t är oberoende av $(X(s))_{s \leq t}$. Det betyder att i det ursprungliga systemet är avgångsprocessen en Poissonprocess med intensitet λ och avgångar före t är oberoende av $(X(s))_{s \geq t}$.