

$M/M/\infty$

Här är $X_q = S_q \equiv 0$ eftersom inga köer bildas. Upphållstiden är densamma som betjäningstiden, en exponentialfördelad stokastisk variabel. De lokala balansekvationerna blir

$$\lambda\pi_{k-1} = k\mu\pi_k, \quad k \geq 1,$$

så

$$\pi_k = \frac{\lambda}{k\mu} \pi_{k-1} = \frac{\lambda}{k\mu} \cdot \frac{\lambda}{(k-1)\mu} \pi_{k-2} = \cdots = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k(k-1)\cdots 1} \pi_0 = \frac{r^k}{k!} \pi_0.$$

Med $\pi_0 = e^{-r}$ är π en sannolikhetsfördelning, den unika stationärfördelningen för den ergodiska processen. Vi känner igen fördelningen som Poissonfördelningen med parameter $r = \lambda/\mu$.

Tidsreversibilitet

Låt $(X_t)_{t \geq 0}$ vara en stationär Markovkedja. För $i \neq j$ är

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(t) = j | X(t+h) = i) &= \frac{\mathbf{P}(X(t) = j, X(t+h) = i)}{\mathbf{P}(X(t+h) = i)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(X(t+h) = i | X(t) = j) \mathbf{P}(X(t) = j)}{\mathbf{P}(X(t+h) = i)} \\ &= \mathbf{P}(X(t+h) = i | X(t) = j) \frac{\pi_j}{\pi_i} \end{aligned}$$

Detta ger att Markovkedjan i baklängestid har övergångsintensiteter

$$q'_{ij} = q_{ji}\pi_j/\pi_i,$$

En stationär födelse-/döds-process uppfyller

$$\pi_i q_{ij} = q_{ji} \pi_j \quad (\text{dvs } \pi_i \lambda_i = \pi_{i+1} \mu_{i+1})$$

vilket innebär att $q_{ij} = q'_{ij}$, dvs framåtkedjan och bakåtkedjan har samma fördelning. Födelse-/döds-processer är tidsreversibla.

Ett stationärt $M/M/c$ -system är tidsreversibelt. I det reverserade systemet är ankomstprocessen en Poissonprocess med intensitet λ och ankomster efter t är oberoende av $(X(s))_{s \leq t}$. Det betyder att i det ursprungliga systemet är avgångsprocessen en Poissonprocess med intensitet λ och avgångar före t är oberoende av $(X(s))_{s \geq t}$.

$M/M/1$ i tandem

Betrakta d stycken kösystem på rad. En kund som expedierats vid station 1 går vidare till station 2 därefter till station 3 och så vidare. Varje station har en betjänares och betjäningstiderna vid station $1, 2, \dots, d$ är oberoende och exponentialfördelade med intensiteter $\mu_1, \dots, \mu_d$. Ankomster utifrån sker enbart till station 1 enligt en Poissonprocess med intensitet $\lambda < \mu_j$, för alla j .

Med $\rho_1 = \lambda/\mu_1$ är station 1 ett $M/M/1$ -system och stationärfördelningen för k kunder är $(1-\rho_1)\rho_1^k$. Om station 1 är stationär är utprocessen en Poissonprocess med intensitet λ och då är även station två ett $M/M/1$ -system med stationär fördelning för k kunder $(1-\rho_2)\rho_2^k$, där $\rho_2 = \lambda/\mu_2$. Upprepas resonemanget fås att station j har en stationärfördelning

$$\mathbf{P}(X_j = k) = (1 - \rho_j) \rho_j^k, \quad k \geq 0, \quad \rho_j = \lambda/\mu_j$$

Vidare är den simultana fördelningen för det stationära antalet kunder

$$\mathbf{P}(X_1 = k_1, \dots, X_d = k_d) = (1 - \rho_1) \rho_1^{k_1} \cdots (1 - \rho_d) \rho_d^{k_d}.$$

Motsvarande kan göras för $M/M/c$ -system. Antalet kunder vid stationerna i det stationära tandem-systemet av $M/M/c$ -köer är simultant oberoende stokastiska variabler där marginalfördelningarna är desamma som för $M/M/c$ -systemet.

$M/M/1$ med återkoppling

Ankomster sker enligt en Poissonprocess med intensitet λ . Betjäningstiderna är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde $1/\mu$. Varje slutförd betjäning resulterar i en korrekt enhet med sannolikhet p oberoende av tidigare betjäningar. Icke-korrekta enheter servas på nytt.

Systemet har samma dynamik som ett $M/M/1$ -system med ankomstintensitet λ och nettobetjäningsintensitet $p\mu$, dvs det existerar en stationärfördelning för antalet kunder som ges av

$$\pi_k = (1 - \rho)\rho^k, \quad k \geq 0$$

då $\rho = \lambda/p\mu < 1$.

Låt Λ vara den totala ankomstintensiteten varmed enheter kommer till betjänares, inklusive retur av icke-korrekta enheter. Då är $\Lambda(1 - p) + \lambda = \Lambda$, dvs $\Lambda = \lambda/p$. Vi kan se systemet som ett system med ankomster enligt en (punkt-)process med intensitet Λ och betjäningsintensitet μ . Ankomstprocessen är ej en Poissonprocess.

Jacksonnätverk

System av återkopplade $M/M/c$ -system.

- Ankomster till station i , $i = 1, \dots, d$ enligt en Poissonprocess med intensitet λ_i .
- Betjäningstiderna vid nod i är oberoende exponentialfördelade med väntevärden $1/\mu_i$.
- Markovska rutter i nätverket: en kund lämnar nod i och går till nod j med sannolikhet p_{ij} , oberoende av tidigare väg, och lämnar nätverket med sannolikhet $p_i = \sum_{j=1}^d p_{ij}$.

Alla storheter förutsätts vara oberoende.

Låt Λ_j vara den totala intensiteten ut ur nod j . Trafikbalans ger att Λ_j måste uppfylla

$$\Lambda_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^d \Lambda_i p_{ij}.$$

Om $\rho_j = \Lambda_j/\mu_j < 1$, $j = 1, \dots, d$, så är $(X_1(t), \dots, X_d(t))_{t \geq 0}$ en ergodisk Markovkedja med stationärfördelning

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_d = x_d) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_d = x_d) = \pi_1(x_1) \cdots \pi_d(x_d)$$

där $\pi_i(k)$ är fördelningen för det i ett stationärt $M/M/c$ -system finns k enheter.

Exempel: Exempel på Jacksonnätverk