Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF2941 (fd 5B1541) SANNOLIKHETSTEORI OCH LINJÄRA MODELLER TORSDAG DEN 22 MAJ 2002 KL 08.00–13.00

Examinator: Timo Koski, tel. 790 71 34, e-post: timo@math.kth.se

Tillåtna hjälpmedel: *Appendix 2* ur A.Gut: An Intermediate Course in Probability (utdelas). *Formulas for probability theory and linear models* SF2941 (utdelas). Räknare.

Införda beteckningar skall förklaras och definieras. Resonemang och uträkningar skall vara så utförliga att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet. Resultat i deluppgift som inte lösts får användas i andra deluppgifter.

Tentamen består av 6 uppgifter. Varje korrekt lösning ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är preliminärt 30 poäng. Möjlighet att komplettera ges för de tentander med 28–29 poäng. Tid och plats för komplettering kommer att anges på kursens hemsida. Det ankommer på dig själv att ta reda på om du har rätt att komplettera.

Lösningarna till tentamen kommer att införas på
`http://www.math.kth.se/matstat/gru/5b1541/`
torsdag den 22 maj 2008 tidigast kl. 13.05.

Tentamen kommer att finnas tillgänglig på elevexpeditionen sju veckor efter skrivningstillfället.

LYCKA TILL!

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Uppgift 1

De stokastiska variablerna $U \in \text{Exp}(1)$ och $V \in \text{Exp}(1)$ är oberoende. Vi sätter $X = U$ och $Y = U + V$.

a) Visa att den simultana sannolikhetstätheten $f_{X,Y}(x, y)$ för (X, Y) är

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{om } 0 \le x \le y \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

(7 p)

b) Bestäm $E[X \mid Y = y]$ och $E[X \mid Y]$. (3 p)

Uppgift 2

Den stokastiska variabeln Z är binomialfördelad, dvs., $Z \in \text{Bin}(n, p)$. Vi har att

$$X \mid Z = r \in \text{Bin}(r, p), \quad Y \mid X = k \in \text{Bin}(k, p), 0 \leq k \leq r, 0 \leq r \leq n.$$

Använd den sannolikhetsgenererande funktionen för att visa att $Y \in \text{Bin}(n, p^3)$. (10 p)

Uppgift 3

Vi har $\mathbf{X} = (X_1, X_2)' \in N\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Var så vänlig och beräkna

$$P(X_1 > X_2).$$

(10 p)

Uppgift 4

$X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots$ är oberoende stokastiska variabler, $N(m, \sigma^2)$-fördelade och

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

är det aritmetiska medelvärdet av de första n av dessa. Vi vill använda $\bar{X}$ för att prediktera värdet på X_{n+1}, dvs. vi försöker förutsäga värdet på den nästkommande observationen. Prediktionsfelet är en stokastisk variabel Z_n definierad som

$$Z_n = X_{n+1} - \bar{X}.$$

a) Bestäm den karakteristiska funktionen för Z_n. Motivera noggrant, v.s.v. ! (5 p)

b) Visa att

$$\frac{Z_n}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Motivera noggrant, v.s.v. ! (5 p)

Uppgift 5

Låt $\{N(t) | t \geq 0\}$ vara en Poissonprocess med parameter λ och låt $X \in \text{Exp}(1/\text{m})$ vara en exponentialfördelad stokastisk variabel som är oberoende av $\{N(t) | t \geq 0\}$.

Betrakta följande experiment: givet utfallet $X = x$ observerar vi utfallet av den stokastiska variabeln $N(x)$. Detta experiment svarar mot att observera utfallen av $N(X)$ eller mot att observera poissonprocessen vid en exponentialfördelad slumptid.

Bestäm sannolikhetsfunktionen

$$P(N(X) = k), k = 0, 1, 2, \ldots$$

(10 p)

Uppgift 6

Låt $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ vara en följd av oberoende, identiskt fördelade (I.I.D) stokastiska variabler, som har den momentgenererande funktionen $\psi_Y(s)$.
Vi definierar

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, n \geq 1, W_0 = 0$$

och X_n med

$$X_n = \frac{e^{sW_n}}{(\psi_Y(s))^n}, n \geq 1.$$

Visa att

$$E\left[X_{n+1} \mid Y_1, Y_2 \ldots Y_n\right] = X_n.$$

Motivera Dina kalkyler noggrant. (10 p)

LÖSNING TENTAMEN I SF2941 SANNOLIKHETSTEORI OCH LINJÄRA MODELLER 08-05-22

Uppgift 1

a) Vi skriver

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \mathbf{W} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}.$$

Vi har

$$f_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}) = e^{-u} \cdot e^{-v}, \quad 0 \leq u, 0 \leq v.$$

Vi sätter

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Således

$$\mathbf{Z} = A\mathbf{W}$$

och vi får

$$\mathbf{W} = A^{-1}\mathbf{Z},$$

där

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Formel 1.2 i formelsamlingen ger

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{\det A} f_{\mathbf{W}}(A^{-1}\mathbf{z})$$

$$= e^{-x} \cdot e^{-(y-x)} = e^{-y}$$

och det är klart att $0 \leq x \leq y$.

b) För att bestämma $E[X \mid Y = y]$ behöver vi

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(Y)} = \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} = \frac{1}{y}, \quad 0 \leq x \leq y,$$

där vi utnyttjat att $Y \in \Gamma(2,1)$, ty Y är en summa av två oberoende Exp(1)-variabler. Då fås

$$E[X \mid Y = y] = \int_0^y x f_{X|Y=y}(x) dx = \frac{1}{y} \int_0^y x dx = \frac{1}{y} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^y = \frac{y}{2}.$$

SVAR b): $\underline{E[X \mid Y = y] = \frac{y}{2}, E[X \mid Y] = \frac{Y}{2}.}$

Uppgift 2

Vi bestämmer den sannolikhetsgenererande funktionen (p.g.f) för Y. Vi gör detta i två steg: vi bestämmer först p.g.f för X och sedan p.g.f för Y.

Steg 1. M.g.f för X är enligt definitionen

$$g_X(t) = E\left[t^X\right].$$

Regeln för dubbelt väntevärde ger

$$E\left[t^X\right] = E\left[E\left[t^X|Z\right]\right] =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} E\left[t^X|Z=r\right] P\left(Z=r\right),$$

ty $Z \in \text{Bin}(n,p)$ har värdeförrådet $\{0,1,\ldots,n\}$. Eftersom $X \mid Z = r \in \text{Bin}\,(r,p)$ och eftersom p.g.f. för $\text{Bin}\,(r,p)$ är enligt kursens formelsamling

$$g_{X|Z=r}(s) = \left(1-p+pt\right)^r,$$

erhåller vi här

$$\sum_{r=0}^{n} E\left[t^X|Z=r\right] P\left(Z=r\right) = \sum_{r=0}^{n} \left(1-p+pt\right)^r P\left(Z=r\right) =$$

$$= g_Z(1-p+pt) = (1-p+p(1-p+pt))^n = (1-p^2+p^2t)^n$$

Därmed har vi delresultatet för Steg 1., som är

$$\underline{g_X(t) = \left(1-p^2+p^2t\right)^n.}$$

Steg 2. På samma sätt som i Steg 1. fås nu att

$$g_Y(t) = E\left[t^Y\right] = g_X(1-p+pt) = \left(1-p^2+p^2(1-p+pt)\right)^n$$

$$= \left(1-p^3+p^3t\right)^n.$$

Detta är ingenting annat än p.g.f för $\text{Bin}\,(n,p^3)$.

SVAR: $\underline{Y \in \text{Bin}\,(n,p^3)\,.}$

Uppgift 3

$$P\left(X_1 > X_2\right) = P\left(X_1 - X_2 > 0\right).$$

Vi sätter

$$Y = X_1 - X_2.$$

Då är enligt väntevärdesvektorn

$$E(Y) = E(X_1) - E(X_2) = 1 - 2 = -1$$

och ur kovariansmatrisen

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) - 2\text{Cov}(X,Y) = 1 + 1 - 2 \cdot 0.6 = 0.8.$$

Eftersom Y är en linjär funktion av en normalfördelad vektor. Då har vi att

$$Y \in N(-1, 0.8).$$

Därmed har vi den sökta sannolikheten som

$$\begin{aligned} P(Y > 0) &= P\left(\frac{Y-(-1)}{\sqrt{0.8}} > \frac{1}{\sqrt{0.8}}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{Y-(-1)}{\sqrt{0.8}} \leq \frac{1}{\sqrt{0.8}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0.8}}\right) = 1 - \Phi(1.12), \end{aligned}$$

ty $\frac{Y-(-1)}{\sqrt{0.8}} \in N(0,1)$, och där $\Phi(x)$ är fördelningsfunktionen för $N(0,1)$. Funktionen Q i 2.1.5. i formelsamlingen ger

$$1 - \Phi(1.12) = Q(1.12) \approx 0.13$$

$$\text{SVAR: } \underline{P(X_1 > X_2) = 1 - \Phi(1.12) \approx 0.13.}$$

Uppgift 4

a) Eftersom $X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}$ är oberoende $N(m,\sigma^2)$-fördelade variabler gäller att

$$E(Z_n) = E(X_{n+1}) - \frac{1}{n}(E(X_1) + \ldots + E(X_n)) = m - \frac{1}{n}nm = 0$$

och

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z_n) &= \mathrm{Var}(X_{n+1}) + \frac{1}{n^2}(\mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n)) \\ &= \sigma^2 + \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Som linjär kombination av normalfördelade variabler är Z_n normalfördelad,

$$Z_n \in N\left(0, \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Den karakteristiska funktionen för Z_n är därmed $\varphi_{Z_n}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$$\text{SVAR a): } \underline{\varphi_{Z_n}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}.}$$

b) Vi har att den karakteristiska funktionen $\frac{Z_n}{\sigma}$ är

$$\varphi_{\frac{Z_n}{\sigma}}(t) = \varphi_{Z_n}\left(\frac{t}{\sigma}\right) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-\frac{1}{2}t^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Detta ger, då $n \to \infty$, att

$$\varphi_{\frac{Z_n}{\sigma}}(t) \to e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Eftersom $e^{-\frac{1}{2}t^2}$ är den karakteristiska funktionen för $N(0,1)$, har vi visat att $\frac{Z_n}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$ enligt påståendet.

Uppgift 5

Eftersom $\{N(t)|t \geq 0\}$ är en Poissonprocess med parameter λ har vi att

$$N(t) \in \mathrm{Po}\,(\lambda t)\,.$$

Därmed har vi

$$P\left(N(X)=k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} P\left(N(x)=k, X=x\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(N(x)=k \mid X=x\right) f_X(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(N(x)=k\right) f_X(x) dx =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} m e^{mx} dx,$$

ty $X \in$ Exp(1/m) och oberoende av $\{N(t)|t \geq 0\}$. Därefter fås

$$= m\frac{\lambda^k}{k!} \int_0^{\infty} x^k e^{-(\lambda+m)x} dx.$$

Enligt en formel ur 11.4 i formelsamlingen fås

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-(\lambda+m)x} dx = \frac{\Gamma(k+1)}{(\lambda+m)^{k+1}}.$$

Därmed har vi fått

$$P\left(N(X)=k\right) = m\frac{\lambda^k}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{(\lambda+m)^{k+1}}$$

Enligt rekursionsformeln för gammafunktionen ur 11.4 i formelsamlingen fås att $\Gamma(k+1) = k!$. Detta ger oss

$$P\left(N(X)=k\right) = \frac{m}{(\lambda+m)}\left(\frac{\lambda}{(\lambda+m)}\right)^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Observera att $1 - \frac{m}{(\lambda+m)} = \frac{\lambda}{(\lambda+m)}$. Således är $N(X) \in \mathrm{Ge}\left(\frac{m}{\lambda+m}\right)$.

$$\text{SVAR}: \underline{N(X) \in \mathrm{Ge}\left(\tfrac{m}{\lambda+m}\right).}$$

Uppgift 6

$$E\left[X_{n+1} \mid Y_1, Y_2 \ldots Y_n\right] = E\left[\frac{e^{sW_{n+1}}}{\left(\psi_Y(s)\right)^{n+1}} \mid Y_1, Y_2 \ldots Y_n\right]$$

$$= \frac{1}{\left(\psi_Y(s)\right)^{n+1}} E\left[e^{sW_{n+1}} \mid Y_1, Y_2 \ldots Y_n\right], \tag{1}$$

ty $\psi_Y(s)$ är en konstant med avseende på det betingade väntevärdet. Vidare har vi

$$E\left[e^{sW_{n+1}} \mid Y_1, Y_2 \ldots Y_n\right] = E\left[e^{s\sum_{i=1}^{n+1} Y_i} \mid Y_1, Y_2 \ldots Y_n\right]$$

$$= E\left[e^{sY_{n+1}} e^{s\sum_{i=1}^{n} Y_i} \mid Y_1, Y_2 \ldots Y_n\right]$$

$$= e^{s\sum_{i=1}^{n} Y_i} E\left[e^{sY_{n+1}} \mid Y_1, Y_2 \ldots Y_n\right], \tag{2}$$

ty $e^{s\sum_{i=1}^{n} Y_i}$ är som en konstant, när vi betingat på $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$. Dessutom gäller att

$$E\left[e^{sY_{n+1}} \mid Y_1, Y_2 \ldots Y_n\right] = E\left[e^{sY_{n+1}}\right], \tag{3}$$

ty Y_{n+1} är oberoende av $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$. Sedan har vi

$$E\left[e^{sY_{n+1}}\right] = \psi_Y(s) \tag{4}$$

enligt definitionen på den momentgenererande funktionen.
Med successiva insättningar av (4) i (3) och av detta i (2) och (1) erhåller vi

$$E\left[X_{n+1} \mid Y_1, Y_2 \ldots Y_n\right] = \frac{1}{\left(\psi_Y(s)\right)^{n+1}} e^{s\sum_{i=1}^{n} Y_i} \psi_Y(s) = \frac{1}{\left(\psi_Y(s)\right)^{n}} e^{s\sum_{i=1}^{n} Y_i} = \frac{1}{\left(\psi_Y(s)\right)^{n}} e^{sW_n} = X_n,$$

vilket skulle visas.