

Matematisk statistik  
KTH

# Formelsamling i matematisk statistik

November 2022

# 1 Kombinatorik

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Tolkning:  $\binom{n}{k}$  = antalet delmängder av storlek  $k$  ur en mängd med  $n$  element.

# 2 Stokastiska variabler

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ C(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y) \\ \rho(X, Y) &= \frac{C(X, Y)}{D(X)D(Y)} \end{aligned}$$

# 3 Diskreta fördelningar

## Binomialfördelningen

$X$  är  $\text{Bin}(n, p)$  om  $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , där  $0 < p < 1$ .  
 $E(X) = np$ ,  $V(X) = np(1-p)$

## ”För-första-gången”-fördelningen

$X$  är  $\text{ffg}(p)$  om  $p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , där  $0 < p < 1$ .  
 $E(X) = \frac{1}{p}$ ,  $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

## Hypergeometrisk fördelningen

$X$  är  $\text{Hyp}(N, n, p)$  om  $p_X(k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ ,  $0 \leq k \leq Np$ ,  
 $0 \leq n-k \leq N(1-p)$ , där  $N$ ,  $Np$  och  $n$  är positiva heltal samt  $N \geq 2$ ,  $n < N$ ,  
 $0 < p < 1$ .  $E(X) = np$ ,  $V(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$

## Poissonfördelningen

$X$  är  $\text{Po}(\mu)$ , där  $\mu > 0$ , om  $p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$   
 $E(X) = \mu$ ,  $V(X) = \mu$

# 4 Kontinuerliga fördelningar

## Likformig fördelning

$X$  är  $U(a, b)$ , där  $a < b$ , om  $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{för } a < x < b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$   
 $E(X) = \frac{a+b}{2}$ ,  $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

## Exponentialfördelningen

$X$  är  $\text{Exp}(\lambda)$ , där  $\lambda > 0$ , om  $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{för } x > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

## Normalfördelningen

$X$  är  $N(\mu, \sigma)$  om  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $\sigma > 0$

$$E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2$$

$X$  är  $N(\mu, \sigma)$  om och endast om  $\frac{X - \mu}{\sigma}$  är  $N(0, 1)$

Om  $Z$  är  $N(0, 1)$  så har  $Z$  fördelningsfunktionen  $\Phi(x)$  enligt Tabell 1 och

tätthetsfunktionen  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ ,  $-\infty < x < \infty$ .

En linjärkombination  $\sum_i a_i X_i + b$  av oberoende, normalfördelade stokastiska variabler är normalfördelad.

## Gammalfördelningen

$X$  är  $\text{Gamma}(c, \lambda)$  om

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^c}{\Gamma(c)} \cdot x^{c-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

där  $\Gamma(c) = \int_0^{+\infty} x^{c-1} e^{-x} dx$ . Om  $c$  positivt heltal har vi  $\Gamma(c) = (c-1)!$ .

$$E(X) = \frac{c}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{c}{\lambda^2}$$

## Betafördelningen

$X$  är  $\text{Beta}(\alpha, \beta)$  om

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

## 5 Centrala gränsvärdesatsen

Om  $X_1, X_2, \dots, X_n$  är oberoende, likafördelade stokastiska variabler med väntevärde  $\mu$  och standardavvikelse  $\sigma > 0$ , så är  $Y_n = X_1 + \dots + X_n$  approximativt  $N(\mu n, \sigma\sqrt{n})$  om  $n$  är stort.

## 6 Approximation

$\text{Hyp}(N, n, p)$  approximeras av  $\text{Bin}(n, p)$  om  $\frac{n}{N} \leq 0.1$

$\text{Bin}(n, p)$  approximeras av  $\text{Po}(np)$  om  $p \leq 0.1$

$\text{Bin}(n, p)$  approximeras av  $N(np, \sqrt{np(1-p)})$  om  $np(1-p) \geq 10$

$\text{Po}(\mu)$  approximeras av  $N(\mu, \sqrt{\mu})$  om  $\mu \geq 15$

## 7 Tjebysjovs olikhet

Om  $E(X) = \mu$  och  $D(X) = \sigma > 0$  så gäller för varje  $k > 0$  att

$$P(|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

## 8 Statistiskt material

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{j=1}^n x_j^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \right]$$

## 9 Punktskattningar

### 9.1 Maximum-likelihoodmetoden

Låt  $x_i$  vara en observation av  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , där fördelningen för  $X_i$  beror på en okänd parameter  $\theta$ . Det värde  $\theta_{\text{obs}}^*$  som maximerar likelihoodfunktionen

$$L(\theta) = \begin{aligned} & p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \theta) = (\text{om oberoende}) = p_{X_1}(x_1; \theta) \cdots p_{X_n}(x_n; \theta) \\ & f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \theta) = (\text{om oberoende}) = f_{X_1}(x_1; \theta) \cdots f_{X_n}(x_n; \theta) \end{aligned}$$

kallas *maximum-likelihoodskattningen* (*ML-skattningen*) av  $\theta$ .

### 9.2 Minsta-kvadratmetoden

Låt  $x_i$  vara en observation av  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , och antag att

$$E(X_i) = \mu_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \text{ och } V(X_i) = \sigma^2,$$

där  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  är okända parametrar och  $X_1, X_2, \dots, X_k$  är oberoende.

*Minsta-kvadratskattningarna* (*MK-skattningarna*) av  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  är de värden

$(\theta_1)_{\text{obs}}^*, (\theta_2)_{\text{obs}}^*, \dots, (\theta_k)_{\text{obs}}^*$  som minimerar kvadratsumman

$$Q = Q(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k))^2.$$

### 9.3 Medelfel

En skattning av  $D(\theta^*)$  kallas *medelfelet* för  $\theta^*$  och betecknas  $d(\theta^*)$ .

### 9.4 Felfortplantning

Med beteckningar och förutsättningar enligt läroboken gäller

a)  $E(g(\theta^*)) \approx g(\theta_{\text{obs}}^*)$

$$D(g(\theta^*)) \approx |g'(\theta_{\text{obs}}^*)| D(\theta^*)$$

b)  $E(g(\theta_1^*, \dots, \theta_n^*)) \approx g((\theta_1)_{\text{obs}}^*, \dots, (\theta_n)_{\text{obs}}^*)$

$$V(g(\theta_1^*, \dots, \theta_n^*)) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C(\theta_i^*, \theta_j^*) \left[ \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right]_{x_k = (\theta_k)_{\text{obs}}^*, k=1, \dots, n}$$

## 10 Några vanliga fördelningar i statistiken

### $\chi^2$ -fördelningen

Om  $X_1, X_2, \dots, X_f$  är oberoende  $N(0, 1)$ , så gäller det att

$$\sum_{k=1}^f X_k^2 \text{ är } \chi^2(f)\text{-fördelad.}$$

### $t$ -fördelningen

Om  $X$  är  $N(0, 1)$  och  $Y$  är  $\chi^2(f)$  samt om  $X$  och  $Y$  är oberoende, så gäller det att  $\frac{X}{\sqrt{Y/f}}$  är  $t(f)$ -fördelad.

## 11 Stickprovsvariablernas fördelningar vid normalfördelade stickprov

### 11.1 Ett normalfördelat stickprov

Låt  $X_1, \dots, X_n$  vara oberoende stokastiska variabler som alla är  $N(\mu, \sigma)$ . Då gäller:

- $\bar{X}$  är  $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  är  $\chi^2(n-1)$
- $\bar{X}$  och  $S^2$  är oberoende
- $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$  är  $t(n-1)$

### 11.2 Två normalfördelade stickprov med samma varians

Låt  $X_1, \dots, X_{n_1}$  vara  $N(\mu_1, \sigma)$  och  $Y_1, \dots, Y_{n_2}$  vara  $N(\mu_2, \sigma)$  och samtliga dessa stokastiska variabler antas vara oberoende. Då gäller:

- $\bar{X} - \bar{Y}$  är  $N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$
- $\frac{(n_1 + n_2 - 2)S^2}{\sigma^2}$  är  $\chi^2(n_1 + n_2 - 2)$  där  $S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ ,  
 $S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2$  och  $S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2$
- $\bar{X} - \bar{Y}$  och  $S^2$  är oberoende
- $\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$  är  $t(n_1 + n_2 - 2)$

### 11.3 Två normalfördelade stickprov med olika varians

Låt  $X_1, \dots, X_{n_1}$  vara  $N(\mu_1, \sigma_1)$  och  $Y_1, \dots, Y_{n_2}$  vara  $N(\mu_2, \sigma_2)$  och samtliga dessa stokastiska variabler antas vara oberoende. Då gäller:

$$\bar{X} - \bar{Y} \text{ är } N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

## 12 Konfidensintervall

### 12.1 $\lambda$ -metoden

Låt  $\theta^*$  vara  $N(\theta, D)$ , där  $D$  är känd och  $\theta$  okänd. Då är

$$\theta_{\text{obs}}^* \pm D \cdot \lambda_{\alpha/2}$$

ett konfidensintervall för  $\theta$  med konfidensgraden  $1 - \alpha$ .

### 12.2 $t$ -metoden

Låt  $\theta^*$  vara  $N(\theta, D)$ , där  $D$  och  $\theta$  är okända och  $D$  inte beror på  $\theta$ .

Låt  $D_{\text{obs}}^*$  vara en punktskattning av  $D$  sådan att  $\frac{\theta^* - \theta}{D^*}$  är  $t(f)$ . Då är

$$\theta_{\text{obs}}^* \pm D_{\text{obs}}^* \cdot t_{\alpha/2}(f)$$

ett konfidensintervall för  $\theta$  med konfidensgraden  $1 - \alpha$ .

### 12.3 Approximativa metoden

Låt  $\theta^*$  vara approximativt  $N(\theta, D)$ .

Antag att  $D_{\text{obs}}^*$  är en lämplig punktskattning av  $D$ . Då är

$$\theta_{\text{obs}}^* \pm D_{\text{obs}}^* \cdot \lambda_{\alpha/2}$$

ett konfidensintervall för  $\theta$  med den *approximativa* konfidensgraden  $1 - \alpha$ .

### 12.4 Metod baserad på $\chi^2$ -fördelning

Låt  $\theta_{\text{obs}}^*$  vara en punktskattning av en parameter  $\theta$  sådan att

$f \cdot \left(\frac{\theta^*}{\theta}\right)^2$  är  $\chi^2(f)$ . Då är

$$\left(\theta_{\text{obs}}^* \sqrt{\frac{f}{\chi_{\alpha/2}^2(f)}}, \theta_{\text{obs}}^* \sqrt{\frac{f}{\chi_{1-\alpha/2}^2(f)}}\right)$$

ett konfidensintervall för  $\theta$  med konfidensgraden  $1 - \alpha$ .

## 13 Linjär regression

### 13.1 Fördelningar

Låt  $Y_i$  vara  $N(\alpha + \beta x_i, \sigma)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , och oberoende. Då gäller:

$$\text{a) } \beta^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \text{ är } N\left(\beta, \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}\right)$$

$$\text{b) } \alpha^* = \bar{Y} - \beta^* \bar{x} \text{ är } N\left(\alpha, \sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}\right)$$

$$\text{c) } \alpha^* + \beta^* x_0 \text{ är } N\left(\alpha + \beta x_0, \sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}\right)$$

$$\text{d) } \frac{(n-2)S^2}{\sigma^2} \text{ är } \chi^2(n-2) \text{ där } S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha^* - \beta^* x_i)^2$$

e)  $S^2$  är oberoende av  $\alpha^*$  och  $\beta^*$

### 13.2 Konfidensintervall

$$I_\alpha : \alpha_{\text{obs}}^* \pm t_{p/2}(n-2) s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$I_\beta : \beta_{\text{obs}}^* \pm t_{p/2}(n-2) \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$I_{\alpha+\beta x_0} : \alpha_{\text{obs}}^* + \beta_{\text{obs}}^* x_0 \pm t_{p/2}(n-2) s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

### 13.3 Beräkningsaspekter

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i = \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$$(n-2)s^2 = S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx} = S_{yy} - 2\beta_{\text{obs}}^* S_{xy} + (\beta_{\text{obs}}^*)^2 S_{xx} = \min_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

## 14 Hypotesprövning

### 14.1 Definitioner

Signifikansnivån (felrisken)  $\alpha$  är (det maximala värdet av)  $P(\text{förfasta } H_0)$  då hypotesen  $H_0$  är sann.

Styrkefunktionen  $h(\theta) = P(\text{förfasta } H_0)$  då  $\theta$  är rätt parametervärde.

### 14.2 Konfidensmetoden

Förfasta  $H_0 : \theta = \theta_0$  på nivån  $\alpha$  om  $\theta_0$  ej faller inom ett lämpligt valt konfidensintervall med konfidensgraden  $1 - \alpha$ .

### 14.3 $\chi^2$ -test

Antag att  $n$  oberoende upprepningar av ett försök med de möjliga utfallen  $A_1, A_2, \dots, A_r$  med respektive sannolikheter  $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_r)$ . Låt, för  $j = 1, 2, \dots, r$ , den stokastiska variabeln  $X_j$  beteckna antalet försök som ger resultatet  $A_j$ .

#### Test av given fördelning

Vi vill testa  $H_0 : P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_r) = p_r$  för givna sannolikheter  $p_1, p_2, \dots, p_r$ . Då blir

$$Q = \sum_{j=1}^r \frac{(x_j - np_j)^2}{np_j}$$
 ett utfall av en approximativt  $\chi^2(r-1)$ -fördelad stokastisk variabel om  $H_0$  är sann och  $np_j \geq 5, j = 1, 2, \dots, r$ .

*Beräkningsaspekt:* 
$$Q = \sum_{j=1}^r \left( \frac{x_j^2}{np_j} \right) - n$$

Om vi skattar  $k$  parametrar ur data,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$  för att skatta  $p_1, p_2, \dots, p_r$  med  $p_1(\theta_{\text{obs}}^*), p_2(\theta_{\text{obs}}^*), \dots, p_r(\theta_{\text{obs}}^*)$ , så är

$$Q' = \sum_{j=1}^r \frac{(x_j - np_j(\theta_{\text{obs}}^*))^2}{np_j(\theta_{\text{obs}}^*)}$$
 ett utfall av en approximativt  $\chi^2(r-k-1)$ -fördelad stokastisk variabel.



### Homogenitetstest

Vi vill testa om sannolikheterna för utfallen  $A_1, A_2, \dots, A_r$  är desamma i  $s$  försöksserier. Inför beteckningar enligt nedanstående tabell:

| Serie       | Antal observationer av |          |          |          |          | Antal försök |
|-------------|------------------------|----------|----------|----------|----------|--------------|
|             | $A_1$                  | $A_2$    | $A_3$    | $\dots$  | $A_r$    |              |
| 1           | $x_{11}$               | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $\dots$  | $x_{1r}$ | $n_1$        |
| 2           | $x_{21}$               | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $\dots$  | $x_{2r}$ | $n_2$        |
| $\vdots$    | $\vdots$               | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$     |
| $s$         | $x_{s1}$               | $x_{s2}$ | $x_{s3}$ | $\dots$  | $x_{sr}$ | $n_s$        |
| Kolonnsomma | $m_1$                  | $m_2$    | $m_3$    | $\dots$  | $m_r$    | $N$          |

$$\text{Bilda } Q = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \frac{\left(x_{ij} - \frac{n_i m_j}{N}\right)^2}{\frac{n_i m_j}{N}}.$$

$Q$  är ett utfall av en approximativt  $\chi^2((r-1)(s-1))$ -fördelad stokastisk variabel om  $n_i m_j / N \geq 5$ , för alla  $i = 1, 2, \dots, s$  och  $j = 1, 2, \dots, r$ .

### Oberoendetest

Antag att värdemängden för den stokastiska variabeln  $X$  kan delas in i kategorierna  $A_1, A_2, \dots, A_r$  och att värdemängden för den stokastiska variabeln  $Y$  kan delas in i kategorierna  $B_1, B_2, \dots, B_s$ . Vi vill testa om de stokastiska variablerna  $X$  och  $Y$  är oberoende.

| Antal observationer | $A_1$    | $A_2$    | $A_3$    | $\dots$  | $A_r$    | Radsumma |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $B_1$               | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $\dots$  | $x_{1r}$ | $n_1$    |
| $B_2$               | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $\dots$  | $x_{2r}$ | $n_2$    |
| $\vdots$            | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $B_s$               | $x_{s1}$ | $x_{s2}$ | $x_{s3}$ | $\dots$  | $x_{sr}$ | $n_s$    |
| Kolonnsomma         | $m_1$    | $m_2$    | $m_3$    | $\dots$  | $m_r$    | $N$      |

Samma teststorhet och fördelning kan användas som vid homogenitetstest.

## 15 Bayesiansk inferens

### 15.1 Apriori- och aposteriorifördelning

Givet en parameter  $\Theta$  i parameterområdet  $\Omega_\theta$  med apriorifördelning  $f_\Theta(\theta)$  och en datapunkt  $X$  med datafördelning  $f_{X|\Theta}(x|\theta)$  har vi aposteriorifördelningen

$$f_{\Theta|X}(\theta|x) = \frac{f_{X|\Theta}(x|\theta)f_\Theta(\theta)}{f_X(x)}$$

där  $f_X(x) = \int_{\Omega_\theta} f_{X|\Theta}(x|\theta)f_\Theta(\theta)d\theta$  är den aprioriprediktiva fördelningen för  $X$ .

### 15.2 Konjugatfamiljer och uppdateringsregler

Om  $\Theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$  och  $X_1, X_2, \dots, X_k$  är betingat oberoende givet  $\Theta$  med  $X_i | \Theta = \theta \sim \text{Bin}(n_i, \theta)$  för  $i = 1, 2, \dots, k$  så har vi

$$\Theta | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k \sim \text{Beta} \left( \alpha + \sum_{i=1}^k x_i, \beta + \sum_{i=1}^k n_i - x_i \right).$$

Om  $\Theta \sim N(\mu_0, \tau_0)$  och  $X_1, X_2, \dots, X_k$  är betingat oberoende givet  $\Theta$  med  $X_i | \Theta = \theta \sim N(\theta, \sigma)$  för  $i = 1, 2, \dots, k$  så har vi

$$\Theta | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k \sim N \left( \frac{\frac{\mu_0}{\tau_0} + \sum_{i=1}^k x_i}{\frac{1}{\tau_0} + \frac{k}{\sigma^2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\tau_0} + \frac{k}{\sigma^2}}} \right).$$

Om  $\Theta \sim \text{Gamma}(c, \lambda)$  och  $X_1, X_2, \dots, X_k$  är betingat oberoende givet  $\Theta$  med  $X_i | \Theta = \theta \sim \text{Po}(\theta)$  för  $i = 1, 2, \dots, k$  så har vi

$$\Theta | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k \sim \text{Gamma} \left( c + \sum_{i=1}^k x_i, \lambda + k \right).$$

Om  $\Theta \sim \text{Gamma}(c, \lambda)$  och  $X_1, X_2, \dots, X_k$  är betingat oberoende givet  $\Theta$  med  $X_i | \Theta = \theta \sim \text{Exp}(\theta)$  för  $i = 1, 2, \dots, k$  så har vi

$$\Theta | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k \sim \text{Gamma} \left( c + k, \lambda + \sum_{i=1}^k x_i \right).$$