Om konvergens av A-kedjor

Gunnar Englund
Matematisk statistik
KTH

Vt 2013

En Markovprocess kallas som bekant en A-kedja om dess tillståndsrum kan skrivas som en disjunkt union $E = A \cup G$ där alla tillstånd i (den icke-tomma) A är absorberande, dvs om $j \in A$ är $p_{jj} = 1$ och inget tillstånd i G är absorberande och varje tillstånd i G leder till minst ett absorberande tillstånd i ett eller flera steg.

Sats: Om $X_0, X_1, X_2, ...$ är en A-kedja med ändligt tillståndsrum så gäller oberoende av initialfördelningen att

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \in A) = 1 \text{ eller ekvivalent } \lim_{n\to\infty} P(X_n \in G) = 0$$

Idéen i beviset nedan är i princip att en viss andel $(1-\delta) < 1$ av massan på G försvinner från G till A om man stegar ett visst antal steg framåt. Massan på G minskar alltså exponentiellt mot 0.

Bevis: Om $j \in A$ gäller för varje i att

$$p_{ij}^{(0)} \le p_{ij}^{(1)} \le p_{ij}^{(2)} \le p_{ij}^{(3)} \le ...$$

eftersom

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} \ge p_{ij}^{(n-1)} p_{jj} = p_{ij}^{(n-1)}$$

ty j är absorberande. Massan på ett absorbtionstillstånd kan inte avta!

Antag att $i \in G$. Enligt definitionen av genomgångstillstånd finns då ett tillstånd $j(i) \in A$ (vilket alltså typiskt beror av i) och ett tal n_i (som också typiskt beror av i) så att $p_{ij(i)}^{(n_i)} > 0$. Varje genomgångstillstånd skulle ju leda till minst ett absorberande tillstånd i ett eller flera steg. Låt nu $n_0 = \max_{i\in G} n_i$ och $\delta = \min_{i\in G} p_{ij(i)}^{(n_i)} > 0$. Notera att vi här utnyttjar att E är ändligt! Annars skulle t ex n_0 ej säkert vara ändligt och δ inte säkert strikt positivt!

Vi inser då vidare att $\sum_{j\in A} p_{ij}^{(n_0)} \ge \delta$ för alla i eller ekvivalent $\sum_{j\in G} p_{ij}^{(n_0)} \le 1-\delta$ för alla i. I ord: av massan på G försvinner minst andelen $1-\delta < 1$ till A då kedjan stegar fram n_0 steg.

Vi får också $P(X_0 \in G) \geq P(X_1 \in G) \geq P(X_2 \in G) \geq ...$ (massan på G avtar) och med n_0 och δ enligt ovan får vi

$$P(X_{k \cdot n_0} \in G) = \sum_{i \in G} \sum_{j \in G} P(X_{(k-1)n_0} = i) p_{ij}^{(n_0)} =$$

$$\sum_{i \in G} P(X_{(k-1)n_0} = i) \sum_{j \in G} p_{ij}^{(n_0)} \leq (\text{sista summan } \leq 1-\delta) \leq (1-\delta) P(X_{(k-1)n_0} \in G).$$

och upprepad användning av detta ger

$$P(X_{k \cdot n_0} \in G) \leq (1-\delta)^k P(X_0 \in G)$$

som om vi låter $k \to \infty$ ger $P(X_{kn_0} \in G) \to 0$ och pga monotoniteten ovan ger detta $\lim_{n \to \infty} P(X_n \in G) = 0$. All massa hamnar alltså (asymptotiskt) i absorbtionstillstånden.