Konstruktion av A-matris för två-dimensionell normalfördelning.

Låt$(X, Y)^T$ vara

$$N_2(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{C}) = N_2\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\right)$$

Vi vill nu bestämma a, b och c så att $X_1 = m_1 + aZ_1$ och $X_2 = m_2 + bZ_1 + cZ_2$ där Z_1 och Z_2 är oberoende $N(0, 1)$.

Vi har $V(X_1) = a^2$. Vidare är $V(X_2) = c_{22} = b^2 + c^2$ och $C(X_1, X_2) = C(m_1 + aZ_1, m_2 + bZ_1 + cZ_2) = ab$ eftersom Z_1 och Z_2 är oberoende. Detta ger ekvationerna

$$\begin{cases} c_{11} = a^2 \\ c_{22} = b^2 + c^2 \\ c_{12} = c_{21} = ab \end{cases}$$

Detta ekvationssystem har flera lösningar ty vi får i den första ekvationen $a = \pm\sqrt{c_{11}}$. Vi kan t ex ta $a = \sqrt{c_{11}}$. Den tredje ekvationen ger då $b = c_{12}/a = c_{12}/\sqrt{c_{11}}$ som i andra ekvationen ger $c^2 = c_{22} - b^2 = c_{22} - c_{12}^2/c_{11}$ som ger $c = \pm\sqrt{c_{11} - c_{12}^2/c_{11}}$. Att uttrycket under rottecknet är icke-negativt är ekvivalent med att matrisen C är positivt semidefinit, dvs att C verkligen är en kovariansmatris. Att a, b och c ej är entydigt bestämda är inget konstigt - vi skulle ju kunna byta t ex Z_1 mot $-Z_1$ i framställningen ovan utan att något ändrades vad gäller fördelningarna, eftersom även $-Z_1$ är $N(0, 1)$.

Den som har sin linjära algebra i färskt minne inser att det vi har gjort är det som brukar kallas Gram-Schmidts ortogonaliseringsförfarande. Detta är ju ett sätt att maskinmässigt konstruera ett rätvinkligt koordinatsystem (ON-system) för rummet som spänns av ett antal vektorer. Vi uppfattar här de oberoende Z:na som enhetsvektorer och kovarians svarar mot en inre produkt. Standardavvikelsen blir då en norm. Att verkligen kovariansen är en möjlig inre produkt beror på att räknereglerna för kovarians ser ut som de gör. T ex så gäller

1) $C(X, X) = V(X) \geq 0$,

2) $C(X + Y, Z) = C(X, Z) + C(Y, Z)$

3) $C(aX, Y) = aC(X, Y)$.

4) $C(X, Y) = C(Y, X)$

Vad vi alltså gjort är att välja den första koordinatriktningen längs $X_1 - m_1$ och sen valt den andra koordinatriktningen vinkelrätt (dvs oberoende) mot den första i rummet som spänns av X_1 och X_2. Framställningen är alltså ett sätt att beskriva $X_1 - m_1$ respektive $X_2 - m_2$ i detta nya ortonormerade koordinatsystem definierat av enhetsvektorerna Z_1 och Z_2.

Man kan notera att det naturligtvis går lika bra att på detta sätt konstruera en A-matris för en godtycklig C-matris som är nxn. Det minsta antal Z-variabler som behövs är rangen för C, dvs dimensionen för rummet som spänns av de n kolonnvektorerna i C. Ett annat sätt att se allt detta är att vi kan ta fran en sk LR-framställning av C dvs kan skriva $C = AA^T$ där A är en triangulär matris - vi kan alltså här ta $R = A^T$.

Betingad normalfördelning

Detta kan nu användas för att ta fram den betingade fördelningen för $X_2|X_1 = x_1$ på följande sätt. Vi söker alltså

$$P\left(X_2 \leq x | X_1 = x_1\right) = P\left(m_2 + bZ_1 + cZ_2 | m_1 + aZ_1 = x_1\right) =$$

$$= P\left(m_2 + bZ_1 + cZ_2 \leq x \middle| Z_1 = \frac{x_1 - m_1}{a}\right) = P\left(m_2 + b\frac{x_1 - m_1}{a} + cZ_2 \leq x \middle| Z_1 = \frac{x_1 - m_1}{a}\right) =$$

$$P\left(Z_2 \leq \frac{x - m_2 - b\frac{x_1 - m_1}{a}}{c} \middle| Z_1 = \frac{x_1 - m_1}{a}\right).$$

Eftersom Z_1 och Z_2 är oberoende kan vi nu stryka betingningen och detta ger

$$P\left(X_2 \leq x | X_1 = x_1\right) = \Phi\left(\frac{x - m_2 - b\frac{x_1 - m_1}{a}}{c}\right)$$

vilket är samma sak som att säga att $X_2 | X_1 = x_1$ är $N\left(m_2 + b\frac{x_1 - m_1}{a}, c\right)$. Sätter vi nu in de erhållna förslagen på a, b och c erhålls

$$N\left(m_2 + \frac{c_{12}}{c_{11}}(x_1 - m_1), \sqrt{c_{22} - c_{12}^2/c_{11}}\right)$$

För övrigt bör man betona att det är bara när vi har en betingning av typen $X_1 = x_1$ som man får normalfördelning. Alltså är t ex $X_2 | X_1 \leq a$ ej normalfördelad!