Laplacetransformer och centrala gränsvärdessatsen

För att visa centrala gränsvärdessatsen kan man använda transformer av olika slag. En sådan transform är *Laplacetransformen* av fördelningar.

Definition 1 *Laplacetransformen $\Psi(t)$ till fördelningen för en stokastisk variabel X definieras av*

$$\Psi_X(t) = E(e^{-tX}) = \begin{cases} \sum_k e^{-tk} p_X(k) \text{ om } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} f_X(x)dx \text{ om } X \text{ kontinuerlig} \end{cases}$$

Exempel. Antag att X är standard normalfördelad, N(0,1). Vi erhåller

$$\Psi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+2tx)/2} dx =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+t)^2/2+t^2/2} dx = (\text{sätt y=x+t}) = e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy =$$
$$e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)dy = e^{t^2/2}$$

eftersom $\phi(y)$ är standard normalfördelningens täthet.

Man kan visa att Laplacetransformen är entydig, dvs två olika fördelningar har olika Laplacetransformer.

Sats 1 *a) Laplacetransformen för en translation av X är*

$$\Psi_{aX+b}(t) = \Psi_X(at)e^{-bt}$$

b) Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende stokastiska variabler är Laplacetransformen för summan, produkten av de enskilda variablernas Laplacetranformer

$$\Psi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = \Psi_{X_1}(t)\Psi_{X_2}(t) \cdot \Psi_{X_n}(t)$$

Speciellt gäller att $\Psi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = \Psi_X(t)^n$ om X-variablerna är likafördelade med laplacetransform $\Psi_X(t)$.

Bevis. a) Vi har att $\Psi_{aX+b}(t) = E(e^{-(aX+b)t}) = e^{bt}E(e^{-(at)X}) = \Psi_X(at)e^{-bt}$.

b) Vi erhåller $\Psi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = E(e^{-t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}) = (\text{oberoendet!}) = E(e^{-tX_1})E(e^{-tX_2}) \cdots E(e^{-tX_n}) = \Psi_{X_1}(t)\Psi_{X_2}(t) \cdot \Psi_{X_n}(t)$

Exempel. a) Om X är N(0,1) så är ju $Y = \sigma X + m$ N(m,σ). Härav erhåller vi att $\Psi_Y(t) = e^{-mt+\sigma^2 t^2/2}$ enligt a)-delen i satsen.

b) Om $X \in N(m_1, \sigma_1)$ och $Y \in N(m_2, \sigma_2)$ är oberoende är enligt enligt b)-delen i satsen $\Psi_{X+Y}(t) = e^{-m_1 t+\sigma_1^2 t^2/2} \cdot e^{-m_2 t+\sigma_2^2 t^2/2} = e^{-(m_1+m_2)t+(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2}$. Men denna funktion är ju Laplacetransformen av $N(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$, dvs summan av två oberoende normalfördelade variabler är normalfördelad.

Vi skall nu använda Laplacetransformen för att illustrera bevis av centrala gränsvärdessatsen. Vi illustrerar bevistekniken i det fall att vi har en följd av oberoende exponentialfördelade variabler med väntevärde 1. Om X_i är Exp(1) är dess Laplacetransform

$$\Psi_X(t) = \int_0^\infty e^{-tx} e^{-x} dx = \frac{1}{1+t}$$

och väntevärde och standardavvikelse är båda 1. Laplacetransformen existerar i detta fall för alla $t > -1$.

Bilda nu

$$Y_n = \frac{X_1 + X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{n}}$$

Laplacetransformen till Y_n är då enligt ovan

$$\Psi_{Y_n}(t) = E(e^{-t(X_1+X_2+\cdots+X_n-n)/\sqrt{n}}) = e^{tn/\sqrt{n}}(\Psi_X(t/\sqrt{n}))^n = e^{t\sqrt{n}}(\frac{1}{1+t/\sqrt{n}})^n$$

Med hjälp av Taylorutveckling får vi då att

$$\ln(\Psi_{Y_n}(t)) = t\sqrt{n} + n\ln(\frac{1}{1+t/\sqrt{n}}) = t\sqrt{n} - n\ln(1+t/\sqrt{n}) =$$
$$t\sqrt{n} - n(t/\sqrt{n} - t^2/(2n) + t^3/(3n^{3/2}) + \cdots) = t^2/2 + H(t,n)/\sqrt{n}$$

där H är en begränsad funktion. Låt $n \to \infty$ och man erhåller att

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\Psi_{Y_n}(t)) = t^2/2 \text{ dvs } \Psi_{Y_n}(t) \to e^{t^2/2}$$

Men denna gränsfunktion är ju Laplacen till N(0,1). Av den sk kontinuitetssatsen följer då att gränsfördelningen för Y_n är just standard normalfördelningen N(0,1), vilket visar cgs i detta fall.

Ett problem med ett allmänt bevis av cgs är att Laplacetransformen inte säkert existerar för något $t \neq 0$. För ett allmänt bevis brukar man därför betrakta *Fouriertransformer* i stället. Dessa kallas inom matematisk statistik för *karaktäristiska funktioner* och defineras

$$\phi(t) = E(e^{itX})$$

där i är imaginära enheten. Karaktäristiska funktioner är ett väsentligt verktyg för att studera sannolkhetsfördelningar och undersöka konvergens.