Karaktäristisk funktion och bevis av CGS

Gunnar Englund
Matematisk statistik
KTH

Vt 2005

1 Karaktäristiska funktioner

Vi definierar funktionen

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}),\ t \in R$$

som kallas den karaktäristiska funktionen för X. Eftersom $e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$ gäller att $\phi_X(t) = E(\cos(tX)) + iE(\sin(tX))$ vilket också visar att karaktäristiska funktionen är väldefinierad för varje fördelning. Karaktäristiska funktion blir för en fördelning med täthet f_X

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx$$

så ϕ_X är Fourier-transformen av täthetsfunktionen. Den som kan sin Fourier-analys vet att det finns en inversformel

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\phi_X(t)dt,$$

som visar att tätheten är bestämd av karaktäristiska funktionen i detta fall. Man kan allmänt visa att den karaktäristiska funktionen entydigt bestämmer fördelningen, dvs om $\phi_X(t) = \phi_Y(t)$ så har X och Y samma fördelning.

Den centrala användningen av karaktäristisk funktion är att vid summering av oberoende variabler som ju svarar mot operationen faltning av fördelningarna så blir karaktäristiska funktionen för summan helt enkelt produkten av de karaktäristiska funktionerna för termerna. Vi har nämligen följande sats.

Sats: Om X och Y är oberoende så blir

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

Bevis:

$$\phi_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX}e^{itY}) = (\text{oberoendet}) = E(e^{itX})E(e^{itY}) = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

$\square$

Detta innebär att om $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ där X_i:na är oberoende blir

$$\phi_{S_n}(t) = \phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t)\ldots\phi_{X_n}(t).$$

Speciellt enkelt blir det om X_i:na dessutom har samma fördelning och därigenom samma karaktäristiska funktion ϕ_X för då blir

$$\phi_{S_n}(t) = (\phi_X(t))^n.$$

Vi har även följande enkla räkneregel för linjära transformationer:

$$\phi_{aX+b}(t) = E(e^{it(aX+b)}) = e^{itb}E(e^{i(ta)X}) = e^{itb}\phi_X(at).$$

Hur ser då den karaktäristiska funktionen ut för olika fördelningar? Den viktigaste är N(0,1)-fördelningen med täthet $f(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$. Vi får karaktäristiska funktionen

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx.$$

Denna integral är lite klurig att beräkna men om vi deriverar m a p t och litar på att detta kan göras under integraltecknet erhåller vi

$$\phi'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} -ie^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-xe^{-x^2/2})dx =$$
$$(\text{partialintegration}) =$$
$$\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}ie^{itx}e^{-x^2/2}dx - \int_{-\infty}^{\infty} -i^2te^{itx}e^{-x^2/2}dx = 0 - t\phi(t).$$

Vi erhåller alltså diff-ekvationen $\phi'(t) + t\phi(t) = 0$ som har integrerande faktor $e^{t^2/2}$ dvs vi kan skriva den

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t^2/2}\phi(t)\right) = 0,$$

som ger $\phi(t) = Ce^{-t^2/2}$. Eftersom $\phi(0) = E(e^{i\cdot 0\cdot X}) = E(1) = 1$ är $C = 1$ och vi har erhållit följande viktiga resultat.

Om X är N(0,1) gäller att $\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$.

Vi har ytterligare en viktig egenskap hos karaktäristiska funktioner, nämligen att om en svit av dem konvergerar mot en funktion som är en karaktäristisk funktion så konvergerar motsvarande fördelningar. Alltså gäller följande sats som vi ej bevisar.

Sats: Om X_i har karaktäristiska funktionen $\phi_{X_i}(t)$ för $i = 1, 2, \ldots$ och $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$ där $\phi_X(t)$ är karaktäristisk funktion för en sannolikhetsfördelning så gäller att $P(X_n \leq x) \to P(X \leq x)$ då $n \to \infty$ för alla x sådan att $P(X \leq x)$

är kontinuerlig i x. Detta innebär att fördelningen för X_n konvergerar mot fördelningen för X. $\square$

Det är denna typ av fördelningskonvergens som dyker upp i Centrala Gränsvärdessatsen.

Karaktäristiska funktioner kan också användas för att beräkna moment. Vi har ju serieutvecklingen $e^{itx} = 1 + itx + (itx)^2/2 + \dots$ som visar att

$$\phi_X(t) = 1 + itE(X) - t^2E(X^2)/2 + \dots$$

2 Bevis av Centrala Gränsvärdessatsen

Låt nu $X_1, X_2, \dots$ vara oberoende likafördelade med väntevärde μ och varians σ^2. Vi är intresserade av fördelningen för $S_n = \sum_1^n X_i$. Vi vet att $E(S_n) = n\mu$ och $V(S_n) = n\sigma^2$. Vi får då

$$\phi_{S_n}(t) = (\phi_X(t))^n.$$

Det kan vara lämpligt att centrerera variablerna genom att betrakta $X_i - \mu$ i stället för X_i som ger

$$\phi_{S_n - n\mu}(t) = (\phi_{X-\mu}(t))^n$$

och

$$\phi_{(S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n}}(t) = (\phi_{X-\mu}(t/\sigma\sqrt{n}))^n.$$

Men enligt momentkalkylen ovan erhålls (ty $E(X-\mu) = 0$ och $E((X-\mu)^2) = V(X) = \sigma^2$)

$$\phi_{X-\mu}(t) = 1 + it \cdot 0 - \frac{t^2}{2}\sigma^2 + o(t^2),$$

och

$$\phi_{X-\mu}(t/\sigma\sqrt{n}) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2/n).$$

Eftersom $(1 - a/n + o(1/n))^n \to e^{-a}$ erhålls

$$\phi_{(S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n}}(t) = (\phi_{X-\mu}(t/\sigma\sqrt{n}))^n = (1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2/n))^n \to e^{-t^2/2}.$$

Eftersom $e^{-t^2/2}$ är den karaktäristiska funktionen för N(0,1)-fördelningen gäller alltså att fördelningen för $(S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n}$ konvergerar mot N(0,1)-fördelningen vilket är precis vad Centrala gränsvärdessatsen säger.