En ändlig Markovkedja har minst en sluten irreducibel delklass

Definiera relationen $\times$ på elementen i tillståndsrummet E genom att låta

(1) $i \times i$

(2) $i \times j$ om $i \leftrightarrow j$ för $i \neq j$

där $i \leftrightarrow j$ betyder att $p_{ij}^{(n)} > 0$ och $p_{ji}^{(m)} > 0$ för några n och m, dvs att man har dubbelriktad kommunikation mellan i och j. Relationen $\times$ stämmer alltså överrens med $\leftrightarrow$ så när som på att $i \times i$ som ju inte behöver innebära att vi kan komma från i tillbaka till i.

Denna relation $\times$ är en s k ekvivalensrelation (likhetsrelation) dvs den uppfyller

a) (reflexivitet) $i \times i$

b) (symmetri) Om $i \times j$ så gäller $j \times i$

c) (transitivitet) Om $i \times j$ och $j \times k$ så gäller $i \times k$.

Ekvivalensrelationer innehåller ”essensen” av begreppet ”likhet”. Som exempel på en ekvivalensrelation på mängden av människor skulle man kunna ta relationen ”att vara helsyskon” om man inbegriper att man betraktas som helsyskon med sig själv - detta för att reflexiviteten skall vara uppfylld. Symmetrin och transitiviteten är också uppfyllda. Däremot skulle relationen ”att vara hel- eller halvsyskon” ej (säkert) vara en ekvivalensrelation eftersom transitiviteten ej nödvändigtvis behöver vara uppfylld. Man kan ju ha ett halvsyskon som i sin tur har ett halvsyskon som man inte själv är halvsyskon med!

För relationen $\times$ ovan, följer de två första egenskaperna omedelbart och den sista följer ur det faktum att $p_{ik}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)}$ (en konsekvens av Chapman-Kolmogorovs sats).

Sats: En ekvivalensrelation delar in E i disjunkta delmängder där $\times$ gäller inom varje sådan delmängd. Dessa delmängder kallas ekvivalensklasser.

Bevis: Låt $K_i = \{j \in D : j \times i\}$ dvs K_i består av de tillstånd som har relationen $\times$ med i. Uppenbarligen gäller att $\cup_{i \in E} K_i = E$ eftersom åtminstone i ingår i K_i.
Om $i \times j$ så måste $K_i = K_j$ ty om $k \in K_i$ så gäller att $k \times i$ dvs (enligt transitiviteten) $k \times j$ dvs $k \in K_j$. Detta betyder att $K_i \subset K_j$ och på samma sätt inses att $K_j \subset K_i$ dvs $K_i = K_j$.
Om å andra sidan $i \times j$ inte gäller så kan inte $K_i \cap K_j \neq \emptyset$ ty om $k \in K_i \cap K_j$ så gäller $k \times i$ och $k \times j$ dvs $i \times k$ och $k \times j$ dvs (enligt transitiviteten) $i \times j$ men detta strider mot antagande att $i \times j$ inte skulle gälla. Detta betyder att $K_i \cap K_j = \emptyset$.

För ekvivalensrelationen ”att vara helsyskon” innebär detta att mänskligheten delas in i disjunkta helsyskon-skaror! Ovanstående betyder för relationen $\times$ att vi kan dela upp E i en disjunkt union $E = K_{i_1} \cup K_{i_2} \cup K_{i_3} \cup \cdots \cup K_{i_r}$ av r st delmängder. Varje sådant K_{i_j} har fullständig kommunikation inom sig och vad som återstår att visa är att åtminstone någon av dem är sluten. Vi antar därför att ingen av dem är sluten och visar att detta leder till en motsägelse. K_{i_1} är alltså ej sluten och leder därför till åtminstone någon annan, t ex K_{i_2}. Denna är ej heller sluten, men vi kan notera att den ej kan ha någon förbindelse med K_{i_1} för då skulle de har dubbelriktad förbindelse. Om något element i K_{i_2} ledde till något element i K_{i_1} så skulle (p g a transitiviteten) alla tillstånd i K_{i_2} kommunicera med alla element i K_{i_1} och delmängderna skulle ej vara disjunkta. K_{i_2} måste alltså ha förbindelse med någon annan (t ex K_{i_3}) och denna kan i sin tur ej ha förbindelse med K_{i_1} eller K_{i_2}. När vi på detta sätt kommer till den sista K_{i_r} så skulle den inte vara sluten men den får ej heller ha förbindelse med någon av de tidigare. Det finns då ingen ytterligare delmängd som den kan ha förbindelse med. Notera att detta att vi kommer till en sista delmängd beror på att E är ändlig. Om E ej skulle varit ändligt skulle beviset spricka och det finns också oändliga Markovkedjor utan slutna irreducibla delklasser. Ett sådant exempel är kedjan som (deterministiskt) hoppar från i

till $i + 1$ - den saknar uppenbarligen irreducibla delklasser överhuvudtaget och den enda slutna delklassen är E själv!